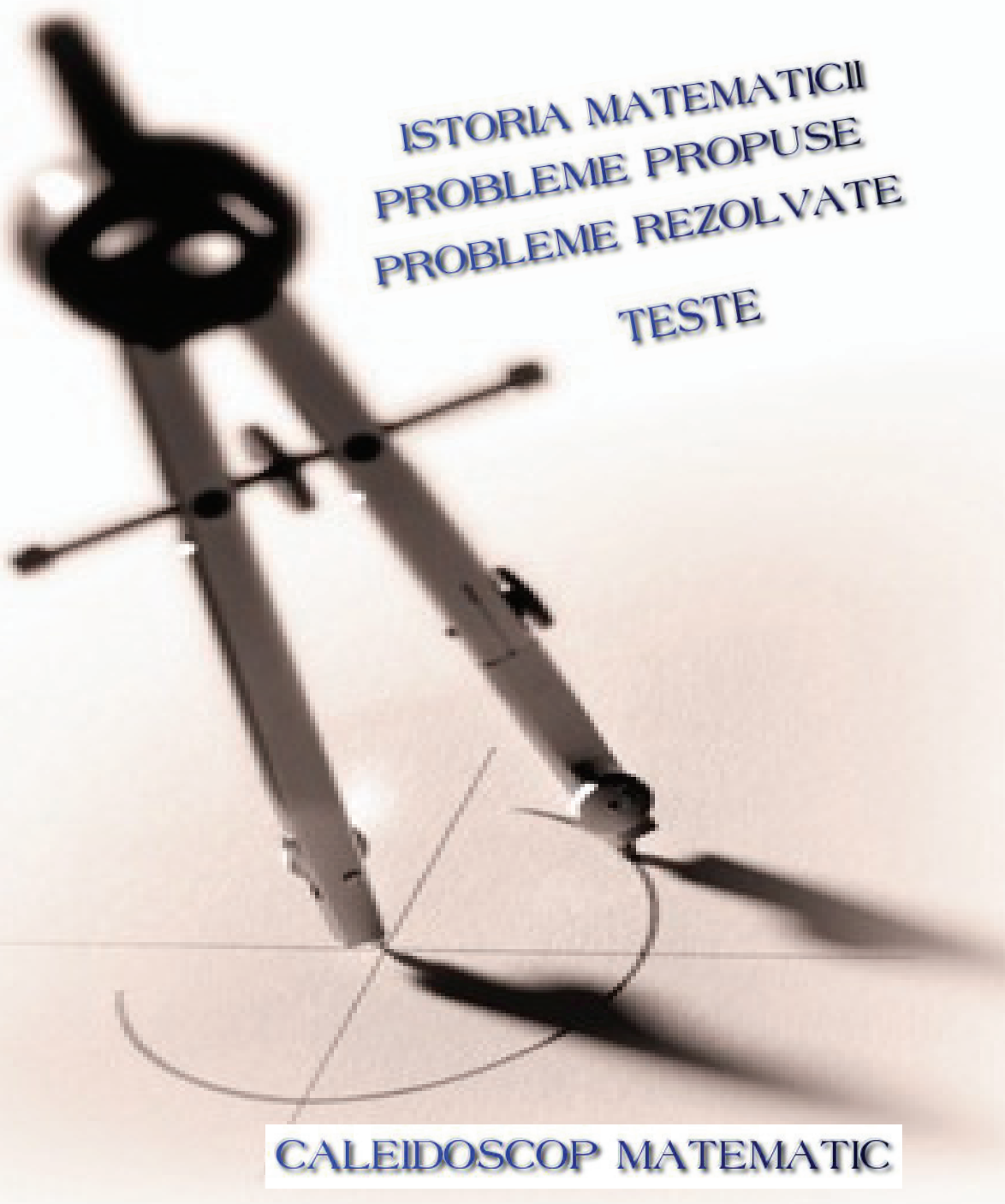
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN IV, NR VII, 2011 * 10 LEI *

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

ISSN 1716-3615

SCLIPIREA MINTII

Revistă de cultură matematică, publicație semestrială, An IV, Nr. VII, APRILIE 2011, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- Președinte de onoare:
  Constantin Apostol

Constantin Rusu - **Președinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Științe Matematice**

Lenuța Pîrlog – **Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice**

- Director:
  Neculai Stanciu
- Redactor șef:
  Adrian Stan
- Redactori principali:
  Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
  Andrei Octavian Dobre **Iuliana Trască**
  Nicolae Ivaşchescu **Gabriela Nicoleta Lupşan**
  Mihály Bencze

Membri :
Luca **Tuță,** Natalia **Pleşu**, Florentina **Popescu**, Ciprian **Cheşcă**, Rodica **Lupşan,** Gheorghe **Struțu**, Ligia **Struțu**, Roxana **Stanciu**, Delia **Naidin**, Ion **Stănescu,** Simion **Marin**, Gherghina **Manea**, Marcela **Marin**, Maria **Anton**, Daniela **Dibu**, Daniela **Ion**, Ion **Lupşan**, Constantin **Lupşan,** Gheorghe **Dârstaru,** Gheorghe **Bodea**, Ion **Radu,** Ovidiu **Țâțan,** Marius **Stan,** Mirela **Axente,** Cristian Cosmin **Brânză,** Constantin E**. Păduraru,** Vasile **Prefac,** Maritanța **Prefac,** Marioara **Vrabie,** Florica **Marchidanu,** Gabriela **Marinescu,** Florica **Anton,** Mirela **Lupşan,** Nicuşor **Lupşan,** Georgeta **Răican,** Lăcrimioara **Năstase,**Viorel **Rotărescu,** Viorica **Rotărescu,** Violeta **Corbu,** Cornelia **Gurău,** Valerica **Roşu,** Mariana **Mitea,** Laura **Tănase,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Jamel **Ghanouchi,** Titu **Zvonaru,** Jose Luis Diaz – **Barrero,** Daniela **Ungureanu.**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

EXAMENE ŞI CONCURSURI..... 12

PROBLEME REZOLVATE..... 14

PROBLEME PROPUSE 29

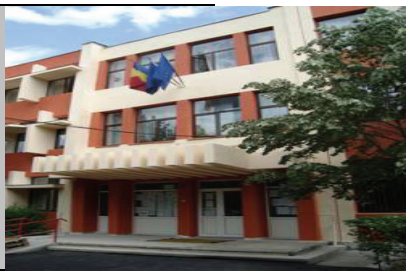
CALEIDOSCOP MATEMATIC..... 37

POŞTA REDACȚIEI..... 39

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACTIA

Grupul Şcolar „ Costin Nenițescu", Buzău,
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Vizitați www. liceulnenitescu.rdsbz.ro



„ Mulţi oameni de valoare nu se pot arăta
aşa cum sunt din cauză că stăpânesc cei răi ''.

Euripide

1. Istoria Matematicii

MIHAIL MANOILESCU
O personalitate de excepţie - premiant la matematică
(1891-1950)

de prof. Neculai Stanciu, Buzău



„Dintre toate păcatele pe care omul politic poate să le facă, cel mai josnic este acela de a sacrifica interesele statului pentru acelea ale partidului. (...). Se întîmplă adesea ca spiritul de partid să fie mai tare decît patriotismul.“ (p. 197)
S-a născut la Tecuci la 21 decembrie 1891. A strălucit, deopotrivă, ca elev, student, profesor, inginer, economist, orator, sociolog, publicist, istoric, eseist, industriaş şi politician. A dispărut, absurd şi nedrept fiind o victimă a unei istorii potrivnice care l-a împiedecat să se realizeze pe deplin. Ca elev a fost premiant al Concursului *Gazetei Matematice* în anii 1907, 1908 şi 1910. La banchetul din anul 1910, unde au participat elevi şi profesori, ***Mihail Manoilescu*** a recitat, aclamat de asistenţă, un poem lung de 124 de versuri, "*Realism şi poesie*", care a fost publicat în suplimentul cu recreaţiuni nr. 9 din mai 1910 al *Gazetei Matematice*. În acest poem sunt exprimate sentimente cu ajutorul noţiunilor matematice:

"....
Calculând cu logaritmi unghiul sufletului tău,
L-am găsit destul de mare ca să-ncap în el şi eu,
Nu cer prea mult de la tine, nu am nici un gând demonic,
Numai ca doi buni prieteni să fim în raport armonic.
....."

Mihail Manoilescu*,* a intrat primul la Şcoala de Şosele şi Poduri în 1910 şi a terminat ca şef de promoţie în 1915. În 1928 a elaborat în limba franceză(ştia la perfecţie franceza, italiana şi germana) volumul "**La théorie du protectionnisme et de l'echange international**", aparut în august 1929 la Editura Giard din Paris. Aceasta este opera lui capitală, despre care Costin Murgescu a scris: La aproape şase decenii, lucrarea lui fundamentală şi-a croit drum în întreaga lume, ea constituie prima străpungere românească în gândirea economică universală şi a intrat definitiv în istoria doctrinelor economice moderne, fiind citată în studii de specialitate, cursuri universitare, tratate şi enciclopedii, dar nu a văzut până în 1986 lumina tiparului în limba română. La 9 iunie 2000, a avut loc o întâlnire la sediul AGIR între reprezentanţii corpului diplomatic, ai ţărilor din America Latină şi mari personalităţi ale ingineriei româneşti. Excelenţa Sa, domnul *Jeroninio Moscardo de Sousa,* fost ministru de stat al Culturii din Brazilia, fost membru al Consiliului Executiv al UNESCO, ambasadorul Braziliei la Bucureşti, de atunci, în discursul sau intitulat "Influenţe reciproce" a calificat România "ca o putere culturală, care a influenţat Brazilia în doua momente decisive: la dobândirea independenţei intelectuale prin *Tristan Tzara* şi în realizarea independenţei economice prin *Mihail Manoilescu*." În ce priveşte contribuţia românească în organizarea economiei braziliene, remarcăm influenţa imensă pe care inginerul ***Mihail Manoilescu*** a avut-o în anii '30, când în Brazilia aveau loc numeroase discuţii privind avantajele şi dezavantajele industrializării. În anul 1932 a fost tradusă în Brazilia cartea lui ***Mihail Manoilescu*** "**Teoria protecţionismului şi a schimburilor internaţionale**", care a devenit "biblia industriaşilor brazilieni", autorul devenind un mentor al gândirii economice pentru brazilieni.

Mihail Manoilescu, a fost: Director în Ministerul Industriei şi Comertului în 1920; Subsecretar de Stat la Ministerul de Finanţe în 1924 ; Ministru al Lucrarilor Publice şi Comunicaţiilor în 1930; Guvernator

al Băncii Naţionale în 1930; Ministru al Industriei şi Comerţului în 1931; profesor de economie politică la Şcoala Politehnică din Bucureşti între anii 1931-1944; senator; preşedinte al Asociatiei Generale a Inginerilor din Romania (AGIR) între anii 1935-1940; preşedinte la Secţia Română a Camerei Internaţionale de Comerţ; Ministru de Externe în 1940. Deţinut politic din 1948 la Ocnele Mari şi Sighet, moare în 1950 datorită regimului de exterminare la care este supus.

„Partidele sunt de un sectarism, de o răutate şi de o violenţă care depăşesc orice limită, deoarece instinctele crude pot să-şi dea, în sînul acestora, acoperirea unei autorităţi colective.“ (p. 223)

„În timp ce dictatura alunecă pe panta pieirii ei, *suprimînd* critica, democraţia îşi consumă prestigiul său şi pe acela al naţiunii, *exagerînd-o*.“ (p. 253)

„Trebuie să se recunoască faptul că în toate ţările, chiar şi în statele cele mai evoluate, guvernul trebuie să exercite faţă de mase o *funcţiune de educaţie*. Din această funcţiune derivă atît ceea ce trebuie să facă guvernul pentru ca să ridice moralitatea vieţii publice, cît şi, mai ales, *ce nu trebuie să facă niciodată*. Orice educator este obligat să dea dovadă de decenţă şi să aibă o ţinută corespunzătoare rolului său. Tot aşa şi guvernul, deoarece abaterile sale faţă de morală au o rezonanţă particulară.“(p. 275)

(Citatele sunt din cartea “**Etica Politică**” , scrisă de ***Mihail Manoilescu,*** în limba franceză, în perioada 1946-1947, între două arestări ale autorului. Soţia şi colaboratoarea acestuia, Elena Vellan-Manoilescu (1895-1967), a tradus-o în limba româna. Cum manuscrisul original s-a pierdut, prezenta ediţie princeps reproduce traducerea respectivă realizată în anii 1950.)

Prof. Scoala cu cls. I.-VIII,
„ George Emil Palade”, Buzău

Din viaţa Filialei Râmnicu Sărat a SSMR

de prof.Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În ziua de patru decembrie 2010, a avut loc lansarea cărţii domnului profesor ***Alexandru Popescu-Zorica*** cu titlul “***Curbe algebrice plane şi invarianţii lor topologici***”. Cartea a fost editată sub egida filialei Râmnicu Sărat a SSMR. În această carte autorul prezintă într-un stil original contribuţia matematicienilor în domeniul curbelor algebrice plane. Faţă de aceşti matematicieni care au trăit într-o perioadă de aproape trei mii de ani autorul manifestă un respect imens. În carte sunt aduse noutăţi importante. Este conturată metoda invarianţilor topologici cu care se poate studia complet o curbă. Autorul o face cu dăruire totală pe curbele cunoscute. În acest “buchet” mare al curbelor algebrice plane, domnul profesor introduce curba “*Icara*”. Autorul invită cititorul să înlocuiască cercul din locul geometric ce conduce la curba “*Icara*” cu orice altă curbă algebrică şi să stabilească raporturile de dualitate cu ele. Rezultatele pe care le obţineţi vă va dezvolta orizontul cunoaşterii şi vă va înobila sufletul. Succes!

„ Cel care va merge împreună cu cei înțelepți, va fi înțelept;
iar cel care merge împreună cu cei fără minte, se va cunoaşte ”.

Septuaginta

2. Articole si note matematice

Observații asupra unor inegalități

de prof. Constantin Rusu

În acest articol vom utiliza noțiunea de extrem local al unei funcții pe baza căreia se obțin unele inegalități.Asupra acestor inegalități se fac observații, iar în partea finală se optimizează o inegalitate cunoscută care apoi este generalizată.

Fie funcția $f:E\subseteq R\to R$. Punctul $A(x_0,m)$ este punct de minim pentru funcția f dacă există o vecinătate a punctului x_0, $V(x_0)$ astfel încât $f(x)\geq m$ pentru orice $x\in V(x_0)\cap E$. Similar se defineşte şi punctul de maxim. În continuare vom obține câteva inegalități interesante. Astfel, fie funcția $f:R\to R$ dată prin $f(x)=e^{x-1}-x$. Studiem monotonia acestei funcții.

Avem $f'(x)=e^{x-1}-1$ care se anulează în $x=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ .Pentru $\forall x\in(-\infty,1]$, $f'(x)\leq 0$ şi pentru $\forall x\in[1,\infty)$, $f'(x)\geq 0$. Deci, punctul $(1,0)$ este punct de minim absolut şi în consecință $f(x)\geq f(1)$ pentru $\forall x\in R$, adică $(1)\ e^{x-1}\geq x$.

Observație: Dacă $\alpha_i\in R\left(i=\overline{1,n}\right)$, atunci $(2)\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n\leq\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right)^n$.

Demonstrație. Notăm cu $M=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}$ şi în inegalitatea (1) înlocuim pe x, pe rând cu $\dfrac{\alpha_1}{M},\dfrac{\alpha_2}{M},...,\dfrac{\alpha_n}{M}$ şi obținem n inegalități pe care le înmulțim şi deducem: $\dfrac{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}{M^n}\leq e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}-n}$

$\Leftrightarrow\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\leq M^n\Leftrightarrow\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\leq\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right)^n$, care reprezintă o extindere a inegalității mediilor.Pentru $\alpha_i>0$, (2) devine inegalitatea mediilor.

(3)Dovediți că $\forall n\in N^*$ avem $\left(\sin^2 x\right)^{\sin^2 x}\cdot\left(\cos^2 x\right)^{\cos^2 x}\geq\dfrac{1}{2}\ \forall x\in R-\{x|\sin 2x=0\}$.

Demonstrație.Notăm $\sin^2 x=t$ şi considerăm funcția $f:(0,1)\to R$, $f(t)=t^t(1-t)^{1-t}$.

Avem $f'(t)=t^t(1-t)^{1-t}\ln\dfrac{t}{1-t}$. $f'(t)=0\Leftrightarrow\ln\dfrac{t}{1-t}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.Rezultă $f'(t)<0\ \forall t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$şi $f'(t)>0\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. Prin urmare $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ este punct de minim absolut pentru funcția f.Deci, $f(t)\geq\dfrac{1}{2}\ \forall t\in(0,1)$, de unde rezultă (3).

Observația 1. Inegalitatea (3) poate avea forma $\left(\sin^2 g(x)\right)^{\sin^2 g(x)}\cdot\left(\cos^2 g(x)\right)^{\cos^2 g(x)}\geq\dfrac{1}{2}$, unde g este o funcție definită pe o mulțime cu valori reale.

Observația 2. Fie şirul $u_n=\left(\sin^2 n\right)^{\sin^2 n}\cdot\left(\cos^2 n\right)^{\cos^2 n}, n\in N^*$.Arătați că şirul $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ este mărginit.Este şirul $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ convergent?

Conform cu demonstrația inegalității (3) avem $u_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ care arată că şirul este mărginit dar nu este convergent, deoarece pentru $x_n=n\pi\to\infty, f(x_n)\to 1$, iar pentru $x_n'=(2n+1)\frac{\pi}{2}\to\infty, f(x_n')\to 0$.

(4)Vom optimiza acum binecunoscuta inegalitate $(4')\ \sum_{1\leq i<j\leq 3}\left(a_i-a_j\right)^2\geq 0$.

Notăm cu x pe a_1 şi inegalitatea $(4')$ devine $f(x)\geq 0$, unde $f:R\to R, f(x)=2x^2-2x(a_2+a_3)+2(a_2^2+a_3^2)-2a_2a_3$.Funcția f are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}\left(\Delta=-12\left(a_2-a_3\right)^2\right)$, care se atinge în $x=\frac{a_2+a_3}{2}$.Deci, $f(x)\geq-\frac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{3}{2}\left(a_2-a_3\right)^2$. Într-un mod asemănător înlocuim pe x cu a_2 şi respectiv cu a_3 şi obținem $f(x)\geq\frac{3}{2}\left(a_1-a_3\right)^2, f(x)\geq\frac{3}{2}\left(a_1-a_2\right)^2$.În concluzie

$$f(x)\geq\max\left\{\frac{3}{2}\left(a_1-a_2\right)^2,\frac{3}{2}\left(a_1-a_3\right)^2,\frac{3}{2}\left(a_2-a_3\right)^2\right\}\Leftrightarrow(4'')f(x)\geq\max\left\{\frac{3}{2}\sum_{1\leq i\neq k<j\leq 3}\left(a_i-a_j\right)^2\middle|k\in\overline{1,3}\right\}.$$

Generalizăm inegalitatea $(4'')$astfel:considerăm inegalitatea $\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i-a_j\right)^2\geq 0$ pe care o vom optimiza prin procedeul de mai sus .Notăm pe x cu a_1 şi se consideră funcția $f(x)=(n-1)x^2-2x\left(\sum_{i=2}^{n}a_i\right)+(n-1)\sum_{i=2}^{n}a_i^2-2\sum_{2\leq i<j\leq n}a_ia_j,\ n\geq 3$.

Observăm că $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$, şi cum $n-1>0$, rezultă că f are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{n}{n-1}\sum_{2\leq i<j\leq n}\left(a_i-a_j\right)^2$.

Procedăm ca mai sus şi obținem în final $(4''')f(x)\geq\max\left\{\frac{n}{n-1}\sum_{1\leq i\neq k<j\leq 3}\left(a_i-a_j\right)^2\middle|k\in\overline{1,n}\right\}$. Pentru $n=3$ se obține $(4'')$.

Bibliografie:

[1]Matematica v. Şcole – nr. 4,5,6/1980

[2]Gussi, Gheorghe; Stănăşilă, Octavian – Elemente de analiză matematică, EDP, Bucureşti, 1983

[3]Drâmbe, Mihai Onucu – Inegalități.Idei şi Metode, Editura Gil.

„ După cum un măgar, care transportă o sarcină de lemne de santal, ştie ce-i povara, dar nu ştie ce-i santalul, tot astfel cei care citesc cărți multe dar fără să le înțeleagă, poartă numai o povară la fel ca nişte măgari ''.

Böhtlingh

Aplicații ale trigonometriei în geometrie

de prof. Adrian Stan

Scurt istoric

Istoria trigonometriei a cunoscut o lungă perioadă de evoluție începând de acum 3000 de ani î.e.n cu vechii egipteni, babilonieni şi indieni preocupați de studiul eclipselor de soare şi de lună, de construcția piramidelor sau de măsurarea unor suprafețe şi distanțe sau de stabilirea unor calendare. Una din cele mai vechi surse de probleme de trigonometrie o constituie papirusul Rhind scris de scribul **Ahmes** (1680-1620, î.e.n) în care se găsesc o serie de probleme de trigonometrie utile în construcția piramidelor.

Etimologic, « **trigonometria »** provine de la cuvintele greceşti **trigonos** = triunghiular şi **metron** = măsură, ca ştiință care se ocupă cu măsurarea unghiurilor şi a relațiilor dintre ele.

Dintre cei mai vechi matematicieni care au contribuit la începuturile acestei ştiințe amintim pe geometrul grec **Hipparchus din Nicaea** (180- 125, î.e.n) care a realizat un tabel trigonometric cu valorile arcelor corespunzătoare unor unghiuri, **Euclid**(325-265, î.e.n) cel care a pus bazele geometriei plane şi care a enunțat teorema catetei şi a înălțimii unui triunghi dreptunghic, a reciprocei teoremei lui Pitagora, a demonstrat concurența mediatoarelor unui triunghi , **Apollonius din Perga**(262-190,î.e.n) a determinat aria unui triunghi în funcție de laturi precum şi în funcție de raza cercului înscris şi semiperimetru.

Eratostene(276-195, î.e.n) este primul care a calculat circumferința Pământului cu o acuratețe remarcabilă găsind valoarea de 39690 km când valoarea ei actuală este de 40008 km. .

Pappos din Alexandria (sec.3) a dat formula lungimii medianei unui triunghi în funcție de laturi şi a formulat teorema celor trei perpendiculare, **Ptolemeu**(87-165) prezintă în cartea sa « Almagest » multe cunoştințe de trigonometrie precum şi diviziunea cercului în 360 de părți congruente şi a construit şi o serie de instrumente astronomo – geodezice. Matematicienii indieni **Aryabhata** (476–550), **Bhaskara I**(600-680), **Brahmagupta** (598–668, e.n) au dat o serie de aproximări pentru sin x şi formule şi tabele trigonometrice.

În lumea arabă, la începutul secolului al IX-lea, **Al Khwarizmi** (780-850) a contribuit cu elaborarea primei table cu valori a funcției tangentă precum şi alte table de valori pentru sin şi cos.

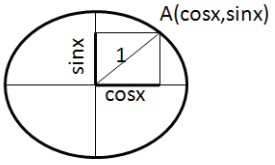
Matematicianul arab **Al Biruni** (973-1048) a demonstrat formula sinusului sumei şi a diferenței măsurilor a două unghiuri, a sinusului unghiului dublu, teorema sinusurilor, precum şi tabele de valori ale sinusului şi tangentei. De asemenea, a avut ideea considerării cercului trigonometric cu raza unitară. A descris şi utilizat metoda triunghiulației metodă dezvoltată de către civilizația arabă.

Un rol important în dezvoltarea trigonometriei ca ştiință de sine stătătoare au avut-o şi matematicienii **Abu al-Wafa(940-998)** , **Omar Khayam**(1048-1131), **Al Kashi**(1380-1429), **Nasir al-Din al-Tusi**(1135-1213), care au îmbunătățit calculele trigonometrice, au găsit valoarea pentru sin 1^0 şi au dat numeroase formule. **Abu al-Wafa**(940-998) a dat formula $\sin(a \pm b)$ în forma ei modernă.

În China, mai puțin preocupați de calculul trigonometric, față de alte ramuri ale matematicii, matematicienii s-au aplecat asupra acestei ramuri începând cu sec. 10 e.n. în timpul dinastiei Song mai mult datorită calendarelor solare şi a calculelor astronomice pe care trebuiau să le facă.

În Europa, sunt cunoscuți ca pionieri ai dezvoltării trigonometriei, matematicienii **Regiomontanus**(1436-1476), **Georg Rheticus**(1514-1574), **Isaac Newton**(1643-1727) şi de asemenea **Leonhard Euler**(1707-1783) cel care a introdus notațiile moderne pentru funcțiile trigonometrice precum şi celebra formulă $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. **John Wallis**(1616-1703) în 1670 desenează graficul funcției sinus, sinusoida, determinând şi semnul funcției sinus.

Aplicații ale trigonometriei în geometrie – noțiuni elementare



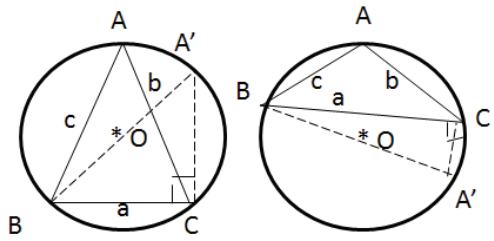
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic de catete sin x şi cos x din cercul trigonometric de rază 1 se obține :

1. Teorema fundamentală a trigonometriei

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ \forall x \in [0^0, 180^0]$.

2. Teorema sinusurilor

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.



Demonstrație :

Dacă ΔABC **este ascuțit unghic** $\Rightarrow$ centrul cercului, O este în interiorul triunghiului iar dacă BA' este diametru atunci $\Delta BCA'$ este dreptunghic adică $a = 2R \sin A'$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Cum $\widehat{A'} \equiv \widehat{A} \Rightarrow a = 2R\sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R.$ Analog pentru celelalte.

Dacă ΔABC este obtuz unghic $\Rightarrow$ centrul cercului, O este în exteriorul triunghiului iar dacă BA' este diametru atunci $\Delta BCA'$ este dreptunghic adică $a = 2R\sin A'$. Cum A şi A' sunt suplementare, rezultă sinA = sinA', rezultând ceea ce trebuia demonstrat.

3. Teorema cosinusului $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Demonstrație : În triunghiul ABC fie $BD \perp AC$, atunci $BC^2 = BD^2 + DC^2 \Rightarrow a^2 = (c\sin A)^2 + (b - c\cos A)^2 \Rightarrow a^2 = c^2\sin^2 A + b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A$.

De aici, rezultă $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Analog şi pentru celelalte laturi.

4. Teorema lui Pitagora generalizată :

Dacă $m(\hat{A}) < 90^0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$ **;** **Dacă** $m(\hat{A}) > 90^0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bAD$ **;**

5. Rezolvarea triunghiului oarecare

Cazul L.U.L Se dau C, a, b.

A şi B se află din $tg\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}ctg\frac{C}{2}$, şi $A + B = \pi - C$, iar c se află din $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$.

Cazul L.L.U. Se dau A, a, b

B se află din $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$, c se află din $c = \frac{b\sin C}{\sin B}$ iar C din $C = \pi - (A + B)$.

Cazul L.L.L. Se dau a, b, c.

A, b, c se pot afla cu ajutorul Teoremei cosinusului sau cu ajutorul formulelor $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; (*)

Cazul U.L.U. Se dau B, C, a.

A se află din $A = \pi - (A + C)$, b din $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$.

6. Formule pentru aria triunghiului

6.1 $S = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$

Cum $h_a = b\sin C$, $h_b = c\sin A$, $h_c = a\sin B$, rezultă

6.2 $S = \frac{b\cdot c\cdot\sin A}{2} = \frac{a\cdot c\cdot\sin B}{2} = \frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2}$

Cum $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, rezultă

6.3 $S = b\cdot c\cdot\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $S = a\cdot c\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, $S = a\cdot b\cdot\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$.

De aici, cu ajutorul formulelor (*) de la punctul 5 se obține:

6.4 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **, unde** $p = \frac{a+b+c}{2}$**. (Formula lui Heron).**

Din 6.2 şi din $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$ (Teorema sinusurilor) rezultă

6.5 $S = \frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$. Analog şi pentru celelalte.

Din teorema sinusurilor , $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{2bc\sin A}$ şi din 6.2 rezultă

6.6 $S = \frac{abc}{4R}$. Cum $b = 2r\sin B$, $c = 2r\sin C$, din 6.2 rezultă **6.7** $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

7. Teorema tangentelor $\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$.

Demonstrația provine din faptul că $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ de unde $\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}\Rightarrow$

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$.

8. Lungimea bisectoarei interioare $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, unde l_a este lungimea bisectoarei [AD].

Pentru demonstrație , se aplică teorema sinusurilor în ΔABD, $\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}$ şi în ΔABC, $\frac{b}{\sin B}=2R$ iar

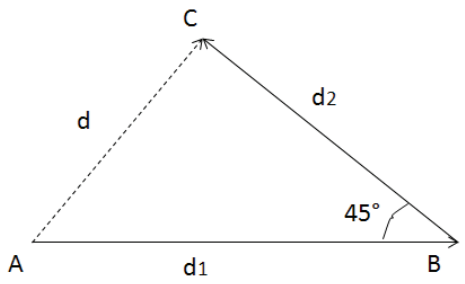
din teorema bisectoarei, $BD=\frac{ac}{b+c}$ rezultă $AD=\frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{ac\cdot\frac{b}{2R}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Aplicații practice ale trigonometriei

Elementele de trigonometrie se pot utiliza la măsurarea distanțelor dintre două corpuri cereşti sau repere terestre, la tehnica de triangulație sau în domeniul maritim, aviatic, în biologie, chimie, inginerie, oceanografie, acustică, optică, statistică.

1. Dacă un vapor se deplasează în mod rectiliniu din portul A în portul B, (neglijându-se curbura Pământului) pe o distanță de 8 km şi apoi din portul B se deplasează $6\sqrt{2}$ km sub un unghi de 45^0 până în portul C. Să se determine ce distanță ar fi parcurs vaporul dacă s-ar fi deplasat direct de la portul A la portul C.

Soluție: Conform figurii alăturate se poate aplica Teorema cosinusului în triunghiul ABC :



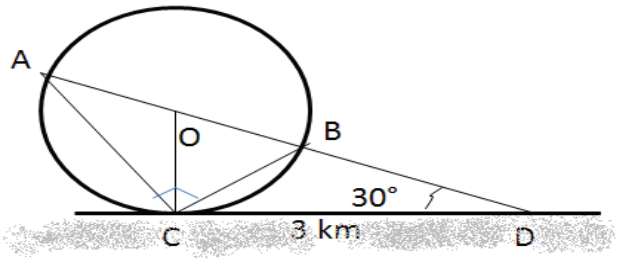
$d^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos 45^0\Rightarrow d^2=8^2+(6\sqrt{2})^2-2\cdot 8\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow d^2=40\Rightarrow d=2\sqrt{10}\approx 6,32km$

2. O persoană mergând pe un drum în linie dreaptă, observă la un moment dat două turnuri sub un unghi de 90^0. După 3 km cele două turnuri se observă ca unul singur pe o direcție ce face un unghi de 30^0 cu drumul. Să se determine distanța dintre cele două turnuri.

Soluție :

Considerăm drumul d şi punctul C pe el unde sunt observate cele două turnuri sub un unghi de 90^0 şi după 3 km pe d, punctul D unde sunt observate cele două turnuri ca unul singur adică in linie dreaptă.

Vom lua cercul ce trece prin A şi B şi este tangent cu drumul în C. Cum [AC] cu [BC] formează 90^0 înseamnă că [AB] este diametrul cercului şi OC este perpendicular pe CD.



$\sin D=\frac{OC}{OD}\Rightarrow\sin 30^0=\frac{OC}{OD}\Rightarrow OD=2OC$.

$\cos D = \frac{CD}{OD} \Rightarrow \cos 30^0 = \frac{CD}{OD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2OC} \Rightarrow$

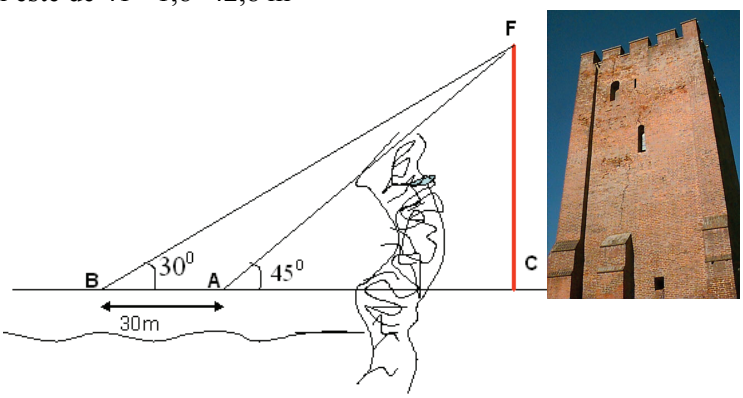
$OC = \sqrt{3}$. Cum [AB] este diametrul cercului înseamnă că este dublul lui [OC] prin urmare $AB = 2\sqrt{3}$. km

3. Făt Frumos vine să o salveze pe fata de împărat, ținută închisă de mama smeilor în vârful unui turn situat peste un râu. În dreptul râului în punctul A, ca în figura alăturată, vede cu ajutorul unui ochean, vârful turnului sub un unghi de 45^0, iar dacă se deplasează înapoi cu 40 de m, vede vârful sub un unghi de 30^0 . Știind că ocheanul se află la o distanță de 180 cm față de sol, să se afle care este înălțimea turnului?

Soluție : Din $tg30^0 = \frac{CF}{30 + AC}$, $tg45^0 = \frac{CF}{AC} \Rightarrow AC = CF$, adică

$AC = \frac{\sqrt{3}}{3}(30 + AC) \Rightarrow AC = \frac{30\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 15(\sqrt{3} + 1) \approx 41m$.

Prin urmare înălțimea turnului este de 41+ 1,8=42,8 m



4. În figura de mai jos, A şi B sunt două localităţi prin care tranzitează o conductă de ţiţei iar dintr-o altă localitate C se doreşte construcţia unei conducte de lungime minimă care să se alimenteze din prima conductă. Între localitatea C şi celelalte două există o pădure ce nu permite să se vizualizeze locul D unde ar trebui să ajungă conducta perpendiculară pe cea principală, dar se cunosc unghiurile formate de AB cu AC de 45^0 şi de AB cu BC de 60^0 iar lungimea între A şi B este de 10 km. Să se determine lungimea distanţei de la C la AB.

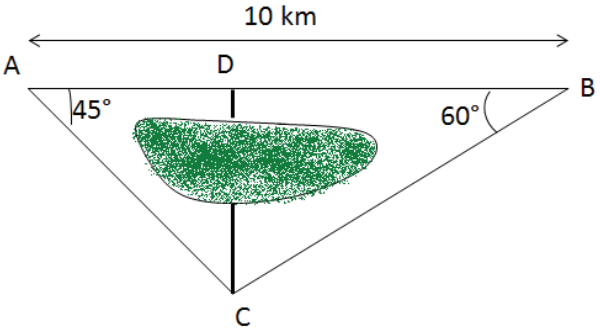
Soluție :

Fie D punctul în care se duce perpendiculara din C pe AB. Atunci CD este distanța minimă şi este egală cu lungimea AD deoarece triunghiul ADC este dreptunghic isoscel. Atunci, $tgA = \frac{CD}{AD}$. În triunghiul BDC,

$tgB = \frac{CD}{10 - AD}$. Din cele două relații rezultă

$AD \cdot tg45^0 = (10 - AD) \cdot tg60^0 \Rightarrow$

$AD = (10 - AD) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow AD \approx 6,35km$.



Bibliografie :
Geometrie. Edwin Moise, Flooyd Downs, Jr. Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti. 1983.
Mică Enciclopedie Matematică. Editura Tehnică. Bucureşti. 1975.

Prof. Grupul Şcolar ''Costin Nenițescu'', Buzău

Cum se "naşte" o problemă de olimpiadă naţională!

de prof. Cheşcă Ciprian

Căutând idei noi pentru a concepe încă o problemă frumoasă pentru olimpiada naţională de informatică, am redeschis cu plăcere şi nostalgie o carte valoroasă, *Gheorghe Sireţchi - Analiză Matematică – vol. II, Exerciţii avansate de calcul diferenţial şi integral real, ediţia a II-a, Bucureşti, 1982*. M-am oprit asupra unui exerciţiu interesant atribuit lui W. Sierpinski cu următorul enunţ :

"Se consideră mulţimea A = {1,2,3,4,5, . . . , 2^{n+1}}.

Să se arate că există $A_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şi $A_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ o partiţie a lui A cu proprietatea că sumele puterilor k, $1 \le k \le n$, ale elementelor fiecărei submulţimi, sunt egale."

Exerciţiul are o valoarea matematică şi "estetică" deosebită şi se pretează prin metoda de rezolvare prezentată la o abordare informatică, în sensul că se poate realiza un algoritm şi respectiv un program care să calculeze cele două submulţimii pentru diferite valori de intrare ale numărului natural n.

Pentru a realiza problema de concurs însă, mai era nevoie de "*valoare adăugată*", adică de o contribuţie proprie care să valorifice ideea exerciţiului de mai sus şi să conducă la o problemă de concurs care să permită testarea cunoştinţelor matematice ale elevilor dar mai ales abilităţile practice de programare.

Având în vedere şi alte probleme asemănătoare de olimpiadă cunoscute, am încercat abordarea unei generalizări. Lucrurile au decurs pozitiv şi după câteva încercări am reuşit generalizarea exerciţiului sub forma :

"Se consideră două numere naturale **p** şi **n** şi **A** = {1,2,3,4,5, . . . , $\mathbf{p^{n+1}}$} mulţimea tuturor numerelor naturale cuprinse între **1** şi $\mathbf{p^{n+1}}$**.** Să se arate că există **p** submulţimi, notate $A_1, A_2, \dots, A_p$ cu proprietăţile:

- Numărul de elemente din fiecare submulţime A_i ,$1 \le i \le p$, este egal cu $\mathbf{p^n}$;
- $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p = \{\varnothing\}$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = A$
- Sumele puterilor **k**, $\mathbf{1 \le k \le n}$**,** ale elementelor fiecărei submulţimi, sunt egale"

1	**2**	**3**	**.....**	**p**
p+1	**p+2**	**p+3**	**.....**	**p+p**
.....	**.....**	**.....**	**.....**	**.....**
$\mathbf{p^2-p+1}$	$\mathbf{p^2-p+2}$	$\mathbf{p^2-p+3}$	**.....**	$\mathbf{p^2}$

Demonstraţie

Vom demonstra existenţa partiţiei cerute prin inducţie matematică, mecanism ce constituie şi baza algoritmului construirii submulţimilor cerute.

Pentru p fixat, presupunem **n=1** şi vom demonstra că există p submulţimi ale mulţimii A = {1, 2, 3, . . . , p^2} de sume egale.

Se aşează elementele mulţimii A într-o matrice M cu pxp linii şi coloane de forma :

Se extinde matricea, adăugând în continuarea acesteia primele p linii şi se formează submulţimile A_i cu elementele de pe diagonala principală a matricei şi cele de pe diagonalele paralele cu diagonală principală.

Exemplu :

Pentru p = 4 vom avea :

A_1 = {1, 6, 11,16} ; A_2 = {5,10,15, 4} ; A_3 = {9,14, 3, 8}; A_4 = {13, 2, 7, 12}

În felul acesta am demonstrat prima etapă din mecanismul inducţiei matematice.

Pentru **n=2** algoritmul de formare a submulţimilor este :

Se porneşte de la submulţimile formate pentru n=1 şi se repetă de p-1 următoarea secvenţă. Fie l numărul de elemente din submulţimea A_i ($1 \le i \le p-1$). La elementele submulţimii A_i se adaugă ultimile l elemente ale submulţimii A_{i+1} adunate cu p^2 iar la elementele submulţimii A_p se adaugă ultimile l elemente ale submulţimii A_1 adunate cu p^2.

Exemplu :

p=3, n=2 ;

A_1 = {1,5,9,13,17,12,25,20,24} ; A_2 = {4,8,3,16,11,15,19,23,27}; A_3 = {7,2,6,10,14,18,22,26,21}

Se poate observa că submulţimile A_1, A_2, A_3 sunt formate din toate elementele cuprinse între 1 şi 3^3 . Să calculăm acum puterile 1 şi 2 ale elementelor acestor mulţimi.

În mod evident suma puterilor 1 ale elementelor este aceeaşi deoarece s-a adăugat acelaşi număr la toate elementele. Să analizăm suma puterilor 2 ale elementelor din prima submulţime adică :

$1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + 17^2 + 12^2 + 25^2 + 20^2 + 24^2 =$

$1^2 + 5^2 + 9^2 + (4+3^2)^2 + (8+3^2)^2 + (3+3^2)^2 + (7+2\cdot3^2)^2 + (2+2\cdot3^2)^2 + (6+2\cdot3^2)^2 =$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 2\cdot3^2(4+8+3) + 2\cdot2\cdot3^2(7+2+6) + 3\cdot(3^4 + 2^2\cdot3^4)$.

Se observă că această sumă este formată dintr-o expresie simetrică şi o expresie care depinde de sumele anterioare, care sunt egale pentru toate cele 3 submulţimi, de unde putem trage concluzia că efectuând aceleaşi calcule pentru celelalte 2 submulţimi vom obţine acelaşi rezultat.
Să presupunem în continuare că există p submulţimi disjuncte cu p^n elemente fiecare pentru care toate sumele puterilor 1,2,3,...,n sunt egale.
Fie $A_1 = \{ x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p^n} \}$, $A_2 = \{ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2p^n} \}$, ..., $A_p = \{ x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pp^n} \}$ partiţia cu proprietăţile cerute. Pentru a demonstra implicaţia p(n+1) repetăm algoritmul descris anterior şi anume :

Se porneşte de la submulţimile descrise mai sus şi se repetă de p-1 următoarea secvenţă. Fie l numărul de elemente din submulţimea A_i ($1 \le i \le p-1$). La elementele submulţimii A_i se adaugă ultimile l elemente ale submulţimii A_{i+1} adunate cu p^n iar la elementele submulţimii A_p se adaugă ultimile l elemente ale submulţimii A_1 adunate cu p^n.
Să analizăm prima dintre cele p submulţimi. Aceasta va fi de forma :

$A_1 = \{ x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p^n}, x_{21}+p^n, x_{22}+p^n, \ldots, x_{2p^n}+p^n$
$, x_{31}+p^n, x_{32}+p^n, \ldots, x_{3p^n}+p^n$
$, x_{41}+p^n, x_{42}+p^n, \ldots, x_{4p^n}+p^n$
.....
$, x_{p1}+(p-1)p^n, \ldots, x_{pp^n}+(p-1)p^n \}$

Suma puterilor k, ($1 \le k \le n+1$) ale elementelor acestei submulţimi va fi formată dintr-o expresie simetrică şi sume de puteri anterioare, aşadar acestea sunt egale pentru toate submulţimile.
Generalizarea problemei a constituit baza problemei ***partitie*** care a fost utilizată în concursul naţional de pregătire a elevilor din cadrul **Centrului Virtual de Excelenţă SIVECO** creat de SIVECO România în colaborare cu Ministerul Educaţiei şi Cercetării şi care reuneşte tineri care prin ideile lor inovatoare contribuie creativ la dezvoltarea pieţei software.

Enunţ: Se consideră două numere naturale p şi n şi A = {1,2,3,4,5, . . . , p^{n+1}} mulţimea tuturor numerelor naturale cuprinse între 1 şi p^{n+1}.

Cerinţă: Să se scrie un program care determină **p** submulţimi, notate A_1 , A_2 , … , A_p cu proprietăţile:

- Numărul de elemente din fiecare submulţime A_i ,$1 \le i \le p$, este egal cu $\mathbf{p^n}$;
- $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p = \{\varnothing\}$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = A$
- Sumele puterilor **k**, $\mathbf{1 \le k \le n}$, ale elementelor fiecărei submulţimi, sunt egale.

Date de intrare
Fişierul de intrare *partitie.in* conţine două numere naturale **p** şi **n** separate printr-un spaţiu, cu semnificaţia de mai sus.
Date de ieşire
Fişierul de ieşire *partitie.out* va conţine **p** linii. Pe linia **i** vor fi scrise cele $\mathbf{p^n}$ elemente ale submulţimii $\mathbf{A_i}$, $\mathbf{1 \le i \le p}$, separate printr-un spaţiu.
Restricţii şi precizări: $2 \le \mathbf{p} \le 10$, $1 \le \mathbf{n} \le 15$, $2 \le \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \le 30$
Exemple:

partitie.in	partitie.out	*Explicaţie*
2 2	1 4 7 6 3 2 5 8	A = {1,2,3,4,5,6,7,8} A_1 = {1,4,7,6} A_2 = {3,2,5,8} 1+4+7+6=3+2+5+8 $1^2+4^2+7^2+6^2=3^2+2^2+5^2+8^2$

Timp maxim de execuţie/test: 0.3 secunde
Total memorie disponibilă 16 MB / 1 MB
Problema a fost desemnată să apară în runda 1 de de pregătire de performanţă în informatică a elevilor de pe site-ul http://campion.edu.ro/ la grupa medie (clasa a X-a). Runda s-a desfăşurat pe o perioada de 10 zile, timp în care elevi din toată ţara au trimis variante de rezolvare a problemei pe site-ul de pregătire. Din cei peste 700 de elevi înscrişi la concurs, au trimis variante de rezolvare 63. Din aceştia, 20 au obţinut punctaje cuprinse între 90 şi 100 de puncte, 5 au obţinut punctaje cuprinse între 50 şi 85 de puncte iar restul au obţinut punctaje mai mici de 50 de puncte.
Bibliografie
1.Emanuela Cerchez, Marinel Şerban-Programarea în limbajul C/C++, Ed. Polirom, 2005;
2.Gheorghe Sireţchi-Analiză Matematică–vol. II, Exerciţii avansate de calcul diferenţial şi integral Bucureşti, 1982;
Profesor, Grupul Şcolar "Costin Neniţescu" Buzău

Demonstrarea prin inducție a inegalității dintre media aritmetică şi cea geometrică

de prof. Mihály Bencze, Braşov

În această notă, prezentăm o demonstrație simplă, a inegalității dintre media aritmetică şi cea geometrică, bazată pe inducția matematică.

Teorema 1. Dacă $x_k > 0\ \left(k=\overline{1,n}\right)$, atunci (*) $\sum_{k=1}^{n} x_k^n \geq n\prod_{k=1}^{n} x_k$.

Demonstrație. Pentru $n=1$ avem $x_1 \geq x_1$, adevărat. Pentru $n=2$, avem $x_1^2+x_2^2 \geq 2x_1x_2$, adică $\left(x_1-x_2\right)^2 \geq 0$, adevărat.Presupunem că (*) este adevărată pentru $n-1$, adică $x_1^{n-1}+...+x_{k-1}^{n-1}+x_{k+1}^{n-1}+...+x_n^{n-1} \geq (n-1)x_1x_2...x_{k-1}x_{k+1}...x_n\ \left(k=\overline{1,n}\right)$, şi acum demonstrăm pentru n .Deoarece $\left(x_i-x_j\right)\left(x_i^{n-1}-x_j^{n-1}\right)\geq 0$ obținem că $x_i^n+x_j^n \geq x_i^{n-1}x_j+x_j^{n-1}x_i$, unde $i,j \in \{1,2,...,n\}$.Avem în continuare

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^n = \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(x_i^n+x_j^n\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(x_i^{n-1}x_j+x_j^{n-1}x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k\left(x_1^{n-1}+...+x_{k-1}^{n-1}+x_k^{n-1}+...+x_n^{n-1}\right) \geq$$

$$\geq (n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k\left(x_1...x_{k-1}x_{k+1}...x_n\right) = n(n-1)\prod_{k=1}^{n} x_k \text{ adică } \sum_{k=1}^{n} x_k^n \geq n\prod_{k=1}^{n} x_k .$$

Teorema 2. Dacă $y_k > 0\ \left(k=\overline{1,n}\right)$, atunci $A(y_1,y_2,...,y_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} = G(y_1,y_2,...,y_n)$.

Demonstrație. În teorema 1. folosim notațiile $x_k = \sqrt[n]{y_k}\ \left(k=\overline{1,n}\right)$.

Bibliografie:

[1]. Octogon Mathematical Magazine (1993 – 2010).

Ştiați că ……

…… denumirea de **matrice** a fost introdusă de matematicianul englez **James Joseph Sylvester (1814 - 1897)** în anul **1851** ca urmare a studiului determinanților şi în urma prieteniei cu matematicianul **Arthur Cayley(1821 - 1895)** cel care a găsit interesant studiul asupra matricelor dând în **1858** şi o teorie a lor.
Studenților de la Oxford, Sylvester le spunea: '' cu toate că este mai tânăr decât mine, Cayley a fost părintele meu spiritual, el a fost primul care mi-a deschis ochii şi i-a curățit de orice ceață, aşa că de atunci ei au putut vedea şi însuşi misterele adânci ale credinței noastre în matematici''.
Cei doi au realizat foarte multe lucrări împreună iar Cayley este considerat matematicianul cel mai prolific din toate timpurile fiind întrecut doar de Euler.

„ Dacă vrei să fii socotit înțelept, învață să întrebi cu înțelepciune, să asculți cu luare aminte, să răspunzi liniştit şi să încetezi de a vorbi când nu mai ai nimic de spus.''

Vernon Law

„ A fi inteligent presupune a folosi şi inteligența altora''

J. F. Kennedy

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA SCLIPIREA MINTII

ediția a V-a,
(6 noiembrie 2010)

de prof. Adrian Stan

Acest concurs aflat la a V-a ediție, a reunit un număr de 269 de elevi din clasele V-XII din care 191 elevi din clasele V-VIII si 78 din clasele IX-XII, de la un număr de 12 scoli şi licee din județul Buzău, după cum urmează: Scoala cu clasele I-VIII, „ George Emil Palade" ; Scoala nr. 1 Rm. Sărat; Scoala V. Cristoforeanu , Rm. Sărat; Scoala Potoceni; Liceul de Artă „ Margareta Sterian";Liceul cu Program Sportiv „ Iolanda Balaş Soter" ,Colegiul Economic Buzău;Grup Şcolar „ Costin Nenițescu",Grup Şcolar Tehnic, „ Sf. Mc. Sava", Berca;Scoala cu clasele I-VIII Bozioru;Scoala cu clasele I_VIII, nr.1 Nehoiu; Scoala cu clasele I-VIII Bâsca Rozilei, Nehoiu.

Au participat un număr de 22 de profesori după cum urmează: prof. Dârstaru Gheorghe, prof. Marin Simion, prof. Radu Ion, prof. Moise Elisabeta, prof. Ungureanu Daniela, prof. Stan Marius, prof. Tănase Laura, prof. Corbu Violeta, prof. Struțu Gheorghe, prof. Struțu Ligia; prof. Popescu Florentina, prof. Dinu Constantin, prof. Dibu Daniela, prof. Manea Gheorghe, prof. Popa Claudia, prof. Prefac Maritanța, prof. Prefac Vasile, prof. Ana Panaitescu, Prof. Constantin Apostol-preşedinte concurs, Prof. Adrian Stan- coordonator, prof. Neculai Stanciu- coordonator, Prof. Iorgu Mînzală – inspector;

Mulțumim pe această cale şi doamnelor directoare Elena Gheorghe şi Aurelia Ignătescu de la Sc. „ George Emil Palade" Buzău, gazdele concursului de la această ediție.

Prezentăm cu această ocazie rezultatele elevilor premiați la Concursul Județean de Matematică **" Sclipirea Minții"** desfăşurat la Şcoala cu clasele I-VIII, "George Emil Palade", Buzău, în data de 6 Noiembrie 2010 , ediția a V-a, clasele V- XII.

Clasa a V-a: **Loc. I**- Dogaru Ioana, Gr. Sc. "Sf. Mc. Sava", Berca, **Loc. II** - Sava Teodor, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat, Văceanu Ramona, Sc. " G. E. Palade", Buzău, Dediu Anda Elena, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat; **Loc. III** – Chiriac Beatrice, Sc. Nr. 1, Rm. Sărat, Gheorghe laura, Rotaru Miruna, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat, Burada Andrei, Anton Bogdan, Sc. " G. E. Palade", Buzău.

Clasa a VI-a: **Loc. I**- Iaru Ioana, Sc. Nr. 1, Rm. Sărat, Sandu Andrei, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat; **Loc. II** – Istrate Adriana, Sc.nr.5, Rm. Sărat, Curcă Cristian, Sc. Bozioru, Neacşu Teodor, Gr. Sc. " Sf. Mc. Sava", Berca; **Loc. III** – Pârvan Mihail, Lic. " M. Sterian",Buzău, Burduf Ana, Alexandru Diana, Sc. " G. E. Palade",

Clasa a VII-a: **Loc. I** – Buterez David, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat, **Loc. II** - Neacşu Karina, Sc. Nr. 1, Rm. Sărat; **Loc. III** – Sîrbu Claudia, Tudorache Alina, Sc. "V. Cristoforeanu", Rm. Sărat,Tătulescu Ana Maria, Sc. Nr. 1 Nehoiu, Colman Viorel, L.P.S. Buzău, Vlad Iuliana, Gr. Sc. " Sf. Mc. Sava" Berca;

Clasa a VIII-a: **Loc. I** - Dan Andra, Sc. Nr. 1 Rm. Sărat, **Loc. II** -Spătaru Felicia, Sc. Bozioru, Ioniță Georgian, Sc. Nr. 1 Rm.Sărat, **Loc. III** – Oancea Maria, Istudor Ştefania, Sc. Grăjdana;

Clasa a IX-a: **Loc. I** – Chiricioiu Adriana, Col. Economic, Buzău, Cotună Andreea, L.P.S. Buzău, **Loc. II** – Feraru Andreea, Gr. Sc. " C. Nenitescu", Buzău, Crețu Luiza, Lic. " M. Sterian", Buzău,**Loc. III** – Nucianu Adriana, Perțea Larisa, Oseac Vasilica, Gr. Sc. " C. Nenitescu";

Clasa a X-a: **Loc. I** – Modoran Mădălina, Gr. Sc. " Sf. Mc. Sava", Berca, **Loc. II** – Stancu Daniela, L. P. S. Buzău, **Loc. III**- Zaharia Mădălina, Gr. Sc. " C. Nenitescu", Anton Crina, Florea Elena, Col. Economic, Buzău;

Clasa a XI-a:**Loc. I** – Chiriță Ştefania, Col. Economic, Gavrilă Marian,L.P.S, **Loc. II** - Nicolae Elena,Col. Economic, **Loc. III** – Gogoci Miruna, L.P.S. Buzău;

Clasa a XII-a: **Loc. I** - Gherasim Andrei, Col. Economic, Mihalache Roxana, L.P.S. Buzău, **Loc. II** – Stângă Mihaela, **Loc. III** - Silivăstru Florin, L.P.S. Buzău,

Prezentăm în continuare subiectele date la liceu. Acestea au fost elaborate de către prof. Adrian Stan şi prof. Gheorghe Dârstaru.

Clasa a IX-a

1. Să se determine $a \in (-2;0)$ astfel încât $\sqrt{a^2}+\sqrt{(3-a)^2}-\sqrt{a^2+4a+4}=3$;

2. Arătaţi că numărul $x=\sqrt{5-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7-5\sqrt{2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$ este natural.

3. Să se demonstreze că :

a) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}^*_+$; b) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \ge \left(1+\frac{2}{a+b}\right)^2$, $\forall a,b \in \mathbb{R}^*_+$

Clasa a X-a

1. Să se calculeze: $\sqrt{3}^{\log_3 \sqrt[3]{64}} - \log_2(\sqrt{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

2. Să se arate că $\log_2 7 + \log_7 17 + \log_{17} 256 \rangle 6$;

3. Să se compare numerele A şi B unde $A=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{12\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{9}-5}$ şi

$B=\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}-(\sqrt[3]{4}-2)^{-1}$.

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+3^{x^2}-3}{\log_3 \sqrt[3]{3^{x^2}}}$;

2. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1+x^2\cdot\sin x}-\cos x}$;

3. În mulţimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $X \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot X = X\cdot A$;

b) Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^5 = A$ în $M_3(\mathbb{C})$.

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-2;-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$.

Să se arate că orice primitivă F a lui f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Să se calculeze integralele: a) $\int \sqrt{2}^{\log_2 \frac{1}{x^2+4}} dx$; $x\in\mathbb{R}$; b) $\int (tg^2 x + tg^4 x)dx$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=3xy-12x-12y+52, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Ştiind că legea este asociativă, să se calculeze $2^{2011}*2^{2010}*.....*2^2*2^1*2^0$;

b) Să se calculeze $\underbrace{x*x*x*....*x}_{n\ factori}$.

Baremele de notare se găsesc pe www.liceulnenitescu.rdsbz.ro / Sclipirea Mintii / concurs / subiecte.

„ Nu da sfatul cel mai plăcut, ci cel mai bun''.
Zenon

4. Probleme rezolvate

▪ *ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR*

P:165. Este posibil să punem 10 bile în 4 cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă şi să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile? Dar 28 de bile în 7 cutii (în aceleaşi condiții)? Dar 90 de bile în 13 cutii ?

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare:

Dacă introducem o bilă în prima cutie, două în a doua, trei în a treia şi patru în a patra ne ies 10 bile care intră astfel în patru cutii. La fel în şapte cutii intră exact 28 de bile după regula dată. Dar în 13 cutii intră cele 90 de bile dar în ultimele două se găsesc exact 12 bile prin urmare nu respectă condiția ca să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile.

P:166. Aflați suma dintre cel mai mare număr natural par de trei cifre distincte, predecesorul şi succesorul său.

***Inst.* Anton Maria**, Berca

Rezolvare: Numerele sunt: 985 986 987. Suma numerelor este: 985 + 986 + 987= 2958

P:167. Un grup format din 9 copii şi 3 adulți au cules 54 Kg de fructe. Ştiind că 3 copii au cules cât 2 adulți, află câte Kg a adunat un copil şi câte un adult?

***Prof.* Brânză Cristian Cosmin,** Bădila, Pârscov

Rezolvare: Notăm cantitatea de fructe culeasă de un copil cu „c" şi pe cea culeasă de un adult cu „a". Atunci, 9 c + 3 a = 54

Ştiind că 3 c = 2 a, atunci, înmulțind cu 3, obținem 9 c = 6 a şi din relația 9 c + 3 a = 54, înlocuim 9 c cu 6 a obținem: 6 a + 3 a = 54 , 9 a = 54 de unde a = 6. Din 9 c + 18 = 54 rezultă c = 4. Aşadar, un copil a cules 4 kg de fructe, iar un adult a cules 6 kg.

P:168. La suma numerelor 48 şi 35 adaugă răsturnatul diferenței lor.

***Înv.* Ion Daniela,** Berca

Rezolvare:

Aflăm suma numerelor: 48 + 35 = 83 ; Aflăm diferența numerelor: 48 – 35 = 13
Răsturnatul nr. 13 este 31. Răspunsul va fi 83 + 31 = 114

P:169. Într-o bombonieră sunt bomboane. Irina a mâncat până a rămas o pătrime din numărul lor. Bunica a mai pus 8 bomboane. Acum, în bombonieră sunt 10 bomboane.
Câte bomboane au fost la început în bombonieră şi câte bomboane a mâncat Irina?

***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi**, Berca

Rezolvare: 10 – 8 = 2 (bomboane – o pătrime din numărul bomboanelor);
4 x 2 = 8 (bomboane – nr. inițial din bombonieră) . Atunci, 8 – 2 = 6 (bomboane – a mâncat Irina).

P:170. Micşorează cel mai mare număr natural de 3 cifre diferite de 1, al căror produs este 36, cu cel mai mic număr natural de 3 cifre diferite de 1, al căror produs este 24, apoi măriți rezultatul obținut cu răsturnatul sumei acestor numere.

Prof. **Lupşan Nicoleta Gabriela**, Berca

Rezolvare:

Cel mai mare număr de 3 cifre diferite de 1, al căror produs este 36 este 922.

Cel mai mic număr de 3 cifre diferite de 1, al căror produs este 24 este 226.

Diferența lor este: 922 – 226 = 696. Suma lor este 922 + 266 = 1 188.

Răsturnatul sumei este 8 811. Atunci, numărul cerut este 696 + 8 811 = 9507

P:171. **Calculați produsul tuturor numerelor naturale mai mici decât 8, apoi măriți-l cu triplul celui mai mic număr natural scris cu două cifre identice. Cu cât trebuie mărit rezultatul pentru a obține numărul ce reprezintă produsul numărului 10 cu el însuşi ?**

Prof. **Marinescu Gabriela**, Stănceşti,Vadu Paşii

Rezolvare: (0x1x2x3x4x5x6x7) + (3x11) = 33

33 + a = 10x10 a = 100 – 33. Rezultă a= 67.

P:172. **Daca înmulțim un număr cu 8 , obținem produsul egal cu suma numărului 36 cu el însuşi.Ce produs vom obține înmulțind acelaşi număr cu el însuşi ? Dar cu 7?**

Prof. **Marinescu Gabriela**, Stănceşti,Vadu Paşii

Rezolvare : Notăm numarul necunoscut cu *a* ***a*** x 8 = 36 + 36. ***a*** = 72 : 8 ***a*** = 9

9 x 9 = 81 9 x 7 = 63

P:173. **Cu o treime din banii pe care îi avea Ana a cumpărat un album de 45 lei, iar cu o zecime din banii care i-au rămas a cumpărat 3 carnețele.**

Cât costă un carnețel? ***Elev*** **Necula Teodor Alexandru**

Prof. **Vrabie Marioara,** Berca

Rezolvare: 45 lei x 3 = 135 lei (banii pe care îi avea) 135 lei – 45 lei = 90 lei (banii care i-au rămas)

90 lei : 10 = 9 lei (costă 3 carnețele) 9 lei : 3 = 3 lei (costă un carnețel). Răspuns: 3 lei

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:192. 5 reviste de matematică şi 4 culegeri de probleme costă 93 lei. Doi colegi schimbă, după cost, 4 reviste cu 3 culegeri. Cât costă 6 reviste şi 5 culegeri ?

Prof. **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

Rezolvare: Dacă notăm cu **r** prețul unei reviste şi cu **c** prețul unei culegeri se obține: $4r = 3c$, $\Rightarrow c = \frac{4}{3}r$ şi $5r + 4 \cdot \frac{4r}{3} = 93 \Rightarrow r = 9 \Rightarrow c = 12$. Atunci, $6r + 5c = 104$ lei.

G:193. Să se determine numerele naturale x şi y, ştiind că diferența lor este egală cu câtul lor.

(Concurs Comăneşti, 2010**)** ***Prof.*** **Constantin Apostol,** Rm. Sărat

Rezolvare: Dacă x şi y sunt cele două numere şi c , câtul lor atunci avem relațiile:

$x - y = c$ şi $x = y \cdot c + r$, unde r este restul , $r \langle y$. Se obțin soluțiile x=n+1, y = n sau x=4, y=2.

G:194. **Arătați că orice putere naturală nenulă a numărului 19 se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.**

Prof. **Marin Simion,** Rm. Sărat

Rezolvare:

$19 = 9 + 9 + 1 = 3^2 + 3^2 + 1^2$;

$19^2 = 361 = 36 + 100 + 225 = 6^2 + 10^2 + 15^2$;

$19^3 = 19^2 \cdot 19 = 19^2 \cdot (3^2 + 3^2 + 1^2) = (19 \cdot 3)^2 + (19 \cdot 3)^2 + (19 \cdot 1)^2$;

$19^4 = 19^2 \cdot 19^2 = 19^2 \cdot (6^2 + 10^2 + 15^2) = (19 \cdot 6)^2 + (19 \cdot 10)^2 + (19 \cdot 15)^2$;

.....

$19^{2n+1} = 19^{2n} \cdot 19 = 19^{2n} \cdot (3^2 + 3^2 + 1^2) = (19^n \cdot 3)^2 + (19^n \cdot 3)^2 + (19^n \cdot 1)^2$;

$19^{2n+2} = 19^{2n} \cdot 19^2 = 19^{2n} \cdot (6^2 + 10^2 + 15^2) = (19^n \cdot 6)^2 + (19^n \cdot 10)^2 + (19^n \cdot 15)^2$.

G:195. Aflați restul împărțirii numărului $A = 10^{2010} - 10^{2009} + 3 \cdot 10^{2008}$ la 33.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: $A = 10^{2008}(10^2 - 10 + 3) = 10^{2008} \cdot 93 =$

$93 \cdot (\underbrace{999...9}_{2008 cifre} + 1) = \quad 93 + 93 \cdot 9 \cdot \underbrace{111...1}_{2008 cifre} = \quad = 93 + 93 \cdot \underbrace{999.....9}_{2008 cifre}$. *Cum* $\underbrace{999.....9}_{:33}$, Cum atunci, restul împărțirii lui A la 33 este egal cu restul împărțirii lui 93 la 33 care este 27.

G:196. Considerăm numărul natural $n = \overline{abc}$, scris în baza 10. Să se arate că dacă diferența dintre n şi suma cifrelor sale este un număr par, atunci a şi b sunt ambele pare sau ambele impare.

***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

Rezolvare: $\overline{abc} - (a + b + c) = 100a + 10b + c - a - b - c = 99a + 9b = 9(11a + b)$ care este un număr par dacă şi numai dacă aşi b sunt fie pare, fie impare.

G:197. Demonstrați propoziția:"dacă pentru orice număr natural $n \rangle 1$ există cel puțin un număr prim p în intervalul $(2n, 3n)$ (*Conjectura lui Sierpinski* pentru k=2) atunci există cel puțin un număr prim în intervalul $(n, 2n)$ (*Postulatul lui Bertrand*)." **Prof. Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

Cazul I: Pentru n par, n= 2k rezultă $n = 2k \langle p \langle 3k \langle 4k = 2n$

Cazul II: Pentru n impar, n = 2k + 1, $n = 2k + 1 \langle 2(k + 1) \langle p \langle 3(k + 1) \langle 4k + 2 = 2n$

Aceasta este cea mai simplă demonstrație a postulatului lui Bertrand şi utilizează: **Propoziția. „**Pentru orice număr natural $n \rangle 1$ există cel puțin un număr prim p astfel încât $2n \langle p \langle 3n$." (demonstrată în 2006 de către matematicianul *M. El Bachraoni*).

G:198. Să se determine un pătrat perfect cuprins între 3^{81} şi $13 \cdot 3^{79}$. **Prof. Adrian Stan,**Buzău

Rezolvare: $3^{81} = 3^2 \cdot 3^{79} \langle 12 \cdot 3^{79} = 2^2 \cdot 3^{80} = (2 \cdot 3^{40})^2 \langle 13 \cdot 3^{79}$. Aşadar, pătratul perfect este $(2 \cdot 3^{40})^2$.

G: 199. Găsiți patru numere ştiind că primul este $\frac{1}{6}$ din al doilea, al doilea $\frac{1}{4}$ din al treilea, al treilea $\frac{1}{2}$ din al patrulea , iar primul cu 94 mai mic decât al patrulea. **Tuța Luca,** Buzău

Rezolvare: Notăm cu x primul număr. Rezultă că al doilea este $6x$, al treilea $24x$, iar al patrulea $48x$ .Cum $48x - x = 47x$ şi diferența dintre al patrulea şi primul este 94 rezultă că $47x = 94$ şi $x = 2$. Numerele căutate sunt: 2,12, 48 şi 96.

G:200. Determinați cinci numere de câte şapte cifre diferite, divizibile cu 250.

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina

Rezolvare: Fie A= $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} = \overline{a_1a_2a_3a_4} \cdot 1000 + \overline{a_5a_6a_7}$, cu toate cifrele a_1, a_2, ...a_7 distincte.

Deoarece $1000 \vdots 250$, rezultă că $A \vdots 250 \Leftrightarrow \overline{a_5a_6a_7} \vdots 250$. Cum cifrele sunt distincte, trebuie ca $\overline{a_5a_6a_7} \in \{250, 750\}$ şi atunci $A \vdots 250$.

Dacă $a_5 = 2, a_6 = 5, a_7 = 0$, cifrele a_1, a_2, a_3, a_4 le alegem astfel încât să avem:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Exemple: 1346250, 3467250, 1468259,…….

Dacă $a_5 = 7, a_6 = 5, a_7 = 0$ cifrele a_1, a_2, a_3, a_4 le alegem astfel încât să avem:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Exemple: 1234750, 2346750, 4689750,……

G:201. Verificați pentru ce numere naturale n, numărul a = 1! + 2! + 3! + … + n! nu este pătrat perfect, unde prin n! înțelegem produsul 1·2·3·…·n.

Prof. Gheorghe Dârstaru, Berca,Buzău

Rezolvare: Pentru n=2, 1!+2!=3 şi nu este pătrat perfect. Pentru n=4, atunci, 1!+2!+3!+4!=33 nu este pătrat perfect. Cum ultima cifră a fiecărui număr 5!, 6!, şi aşa mai departe este 0 atunci ultima cifră a numărului a = 1! + 2! + 3! + … + n! este 3 pentru n mai mare sau egal cu patru. Aşadar, pentru n =2 şi $n \geq 4$, "a" nu este pătrat perfect.

Clasa a VI – a

G:202. Să se arate că 396 divide $12^{n+1} - 22(2^{2n+1} + 3^{n+1}) + 132n + 98$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

Rezolvare: $3^n - 3 = 3(3^{n-1} - 1) = M_6$;

$4^n - 4 = 4(4^{n-1} - 1) = M_6 \Rightarrow (3^n - 3)(4^n - 4) = M_{36}$

$\Rightarrow (3^n - 3)(4^n - 4) = M_{36} \Rightarrow 12^n - 3 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 12 = M_{36} \Rightarrow M_{36} = \sum_{k=1}^{n} (12^k - 3 \cdot 4^k - 4 \cdot 3^k + 12) =$

$= \frac{12^{n+1} - 12}{11} - 3 \cdot 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 12n = \frac{12^{n+1} - 22(2^{2n+1} + 3^{n+1}) + 132n + 98}{11}$.

$36 \cdot 11 = 396 \Rightarrow 12^{n+1} - 22(2^{2n+1} + 3^{n+1}) + 132n + 98 = M_{396}$.

G:203. Să se determine numărul $\overline{xyzt}$**, ştiind că** $\overline{xyzt} + 2 \cdot \overline{yzt} + 3 \cdot \overline{zt} + 4 \cdot t = 2010$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Evident, $x \neq 0$. Pentru x se pot lua valorile 1 sau 2, atunci relația data devine: 100x +30y + 6z +t = 201. Cum 100x, 30y, 6z numere pare şi 201 este număr par rezultă că t este număr impar, deci, $t \in \{1,3,5,7,9\}$. Doar pentru t = 5 se obțin soluții şi anume:

Dacă t = 5 , atunci 100x + 30y +6z = 196 $\Leftrightarrow$ 50x +15y + 3z =98.
Dacă x=1 atunci 15y +3z = 48, 5y + z = 16 de unde y= 2 şi z= 6 sau y= 3 şi x= 1;
Dacă x= 2 nu obținem nicio soluție.
Rezultă, $\overline{xyzt} \in \{1315,1265\}$.

G:204. Există numărul natural a, astfel încât fracția $\frac{3a+2}{4a-2}$ **să se simplifice prin 5 ?**

***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Presupunem că există d, un divizor propriu, comun numărătorului şi numitorului. Se arată că d=2 sau d = 7, prin urmare fracția nu se simplifică prin 5.

G:205. Să se determine mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x+502}{4x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$. **Prof. Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $4x-1 \mid 3x+502 \Rightarrow 4x-1 \mid 4(3x+502)$, $4x-1 \mid 4x-1 \Rightarrow 4x-1 \mid 3(4x-1)$. De aici rezultă că 4x-1 divide şi diferența lor, adică $4x-1 \mid 2011 \Rightarrow 4x-1 \in D_{2011} = \{\pm 1; \pm 2011\}$. Aşadar, $A = \{0; 503\}$.

G:206. Găsiți cel mai mare număr mai mic decât 1000 care are exact 10 divizori.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru,** Buzău

Rezolvare: $n = 3^4 \cdot 11 = 881$, numărul divizorilor lui n este egal cu (4+1)(1+1)=10.

G:207. Suma a trei numere naturale este 87. Dacă se măreşte primul număr cu 150% din el, al doilea se micşorează cu 25 % din el, iar al treilea se micşorează cu 5, numerele obținute sunt egale. Să se afle numerele.

***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

Rezolvare: Din $a+b+c=87$ şi $a+\frac{15}{10}a=b-\frac{b}{4}=c-5$ rezultă

a=12, b=40, c=35.

G:208. Să se arate că $\mathbf{2,7 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{25} < 7,49.}$

Prof. Lăcrimioara Năstase, Padina, Buzău

Rezolvare:

Fie $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{25}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\right)+...+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right)=1+\frac{27}{2\cdot 25}+\frac{27}{3\cdot 24}+...+\frac{27}{13\cdot 14}$

Vom arăta că dacă a+b=27 şi $2\le a\le 13$ atunci $50\le a\cdot b\le 13\cdot 14$

Deoarece $2\le a\le 13$ rezultă că a=2+k, unde $k\in N$, $0\le k\le 11$. Din a+b=27, deducem că b=27-a=27-(2+k)=25-k. Cu aceste notaţii inegalitatea $50\le a\cdot b$ devine:

$50\le(2+k)(25-k) \Leftrightarrow 50\le 50-2k+25k-k^2 \Leftrightarrow k(23-k)\ge 0$, inegalitate evidentă pentru orice număr natural k, $k\le 11$ şi deci inegalitatea $50\le a\cdot b$ este adevărată. (1)

Deoarece $2\le a\le 13$ rezultă că a=13-p, unde $p\in N$, $0\le p\le 11$. Din a+b=27, deducem că b=14+p. Cu aceste notaţii inegalitatea $a\cdot b\le 13\cdot 14$ devine:

$(13-p)(14+p)\le 13\cdot 14 \Leftrightarrow -p-p^2\le 0 \Leftrightarrow -p(1+p)<0$ inegalitate evidentă pentru orice număr natural p , $p\le 11$ şi deci inegalitatea $a\cdot b\le 13\cdot 14$ este adevărată. (2)

Din (1) + (2) rezultă $50\le a\cdot b\le 13\cdot 14$

Rezultă că $S>1+\underbrace{\frac{27}{13\cdot 14}+\frac{27}{13\cdot 14}+...+\frac{27}{13\cdot 14}}_{12\,ori}=1+\frac{12\cdot 27}{13\cdot 14}=1+\frac{324}{182}=1+1,78....\approx 2,78>2,7$ (*)

$$S<1+\underbrace{\frac{27}{50}+\frac{27}{50}+...+\frac{27}{50}}_{12\,ori}=1+\frac{12\cdot 27}{50}=1+\frac{324}{50}\approx 7,48<7,49\ldots\ldots\ldots(**)$$

Din (*) +(**) rezultă că $2,7 < S < 7,49$.

G:209. Să se afle x din egalitatea:

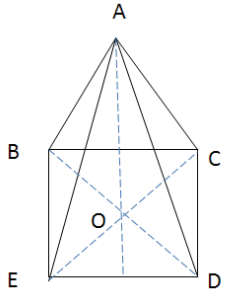
$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5^2}\cdot\left[\frac{1}{5^3}\cdot\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}x\right)-\frac{1}{5^6}\right]-\frac{1}{5^7}\right\}-\frac{1}{5^8}=\frac{1}{5^9},\quad x\in\mathbb{N}.$$

Prof. Cornelia Gurău, Bacău

Rezolvare: $\left\{\frac{1}{5^2}\cdot\left[\frac{1}{5^3}\cdot\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}x\right)-\frac{1}{5^6}\right]-\frac{1}{5^7}\right\}=\frac{6}{5^8}\Rightarrow\frac{1}{5^3}\cdot\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}x\right)-\frac{1}{5^6}=\frac{11}{5^6}\Rightarrow x=295.$

G:210. Se dau triunghiul echilateral ABC şi pătratul BCDE cu vârful A exterior pătratului. Să se împartă un unghi al triunghiului în patru unghiuri congruente, folosind numai o riglă negradată.

Prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova



Rezolvare:

Fie [BC] latura comună dintre triunghi şi pătrat ca în figura de mai jos.

Cum $m(B\hat{A}C)=60^0$, împărţindu-l în patru părţi egale trebuie să obţinem patru unghiuri a câte 15^0. Evident, triunghiul ABE este isoscel. Atunci,

$$m(B\hat{E}A)=m(B\hat{A}E)=\frac{180^0-2m(\hat{B})}{2}=\frac{180^0-(90^0+60^0)}{2}=15^0.$$

Este suficient să se ducă cu rigla [AE] şi [AD]. Atunci, $m(E\hat{A}D)=60^0-(15^0+15^0)=30^0$. La rândul său acesta se împarte în două părţi egale ducând cu rigla [AO] unde O este intersecţia diagonalelor pătratului. Se foloseşte faptul că triunghiurile OCA şi OBA sunt congruente.

Clasa a VII – a

G:211. Se dau numerele naturale a = 3n+5, b = 2n+3, c = n+2, $n \in \mathbb{N}^*$. **Ce fel de număr este** $\sqrt{[a,b]+[a,c]}$, **raţional sau iraţional ?** ***Prof.*** **Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

Rezolvare: Se verifică faptul că numerele a şi b sunt prime între ele. Fie $d=(a,b) \Rightarrow d|a, d|b \Rightarrow d|3n+5, d|2n+3 \Rightarrow d|2(3n+5)-3(2n+3)$ adică, d divide pe 1. Analog a şi c sunt prime între ele. Deoarece perechile de numere sunt prime între ele înseamnă că cel mai mic multiplu comun al lor este egal cu produsul lor, deci $[a,b]+[a,c]=a\cdot b+a\cdot c=a(b+c)$ adică este egal cu $(3n+5)(2n+3+n+2)=(3n+5)^2$ ceea ce înseamnă că numărul dat este raţional.

G:212. **Dacă** a,b,c **sunt laturile unui triunghi arătaţi că** $\frac{a}{1+a},\frac{b}{1+b},\frac{c}{1+c}$ **sunt de asemenea laturile unui triunghi.**

Prof. **Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: Avem $a<b+c, b<c+a, c<a+b$.

$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \Leftrightarrow a(1+b)(1+c)<b(1+a)(1+c)+c(1+a)(1+b) \Leftrightarrow a<b+c+2bc+abc$

$\Leftrightarrow 0<2bc+abc$ (adevărat).

G:213. a) Să se determine numerele $\overline{abc}$ **ştiind că:** $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$ **.**

b) Să se determine numerele $\overline{abcd}$ **ştiind că:** $\sqrt{\overline{abcd}}=\overline{ab}+\sqrt{\overline{cd}}$ **.**

Prof. **Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: a) Ridicând la pătrat relaţia din enunţ obţinem egalitatea:

$\overline{abc}=\overline{ab}^2-2\overline{ab}\cdot\sqrt{c}+c \Rightarrow 100a+10b+c=\overline{ab}\left(\overline{ab}-2\sqrt{c}\right)+c \Rightarrow 10\left(10a+b\right)=\overline{ab}\left(\overline{ab}-2\sqrt{c}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\cdot\overline{ab}=\overline{ab}\cdot\left(\overline{ab}-2\cdot\sqrt{c}\right) \Rightarrow \sqrt{c}=\frac{\overline{ab}-10}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{c} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{c} \in \{0,1,2,3\}$ deoarece c este cifră. Pentru $c=0 \Rightarrow \overline{ab}=10, c=1 \Rightarrow \overline{ab}=12, c=4 \Rightarrow \overline{ab}=14, c=9 \Rightarrow \overline{ab}=16$. Rezultă $\overline{abc}$ $\overline{abc} \in \{100,121,144,169\}$

b) $\overline{abcd}=\overline{ab}^2+2\cdot\overline{ab}\cdot\sqrt{\overline{cd}}+\overline{cd} \Rightarrow \overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}=\overline{ab}^2+2\cdot\overline{ab}\cdot\sqrt{\overline{cd}}+\overline{cd} \Rightarrow 100=\overline{ab}+2\cdot\sqrt{\overline{cd}}$.

Rezultă că: $\sqrt{\overline{cd}} \in \mathbb{N}$, deci $\sqrt{\overline{cd}} \in \{16,25,36,48,64,81\}$. Pentru fiecare caz în parte, se obţin pentru $\overline{ab}$, în ordine , valorile 92,90,88, 86,84,82. Aşadar, $\overline{abcd} \in \{9216,9025,8836,8649,8464,8281\}$.

G:214. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **ecuaţia: x³-3y = 4**

Prof. **Lăcrimioara Năstase**, Padina, Buzău

Rezolvare: Ecuaţia dată se mai scrie: $x^3-4=3y$. Rezultă $x^3-4=M_3$ de unde $x^3=M_3+4=M_3+1$

Cum prin împărţirea la 3 a numerelor întregi se pot obţine resturile $r\in\{0,1,2\}$ rezultă că orice număr este de forma x=3k+r, cu $r\in\{0,1,2\}$ şi $k\in Z$. Avem următoarele cazuri:

x=3k $\Rightarrow x^3=M_3\neq M_3+1$; **x=3k+1** $\Rightarrow x^3=M_3+1$; **x=3k+2** $\Rightarrow x^3=M_3+8=M_3+2\neq M_3+1$

Deci x=3k+1, $k\in Z$, de unde

$$y=\frac{x^3-4}{3}=\frac{(3k+1)^3-4}{3}=\frac{27k^3+27k^2+9k+1-4}{3}=9k^3+9k^2+3k-1$$

Prin urmare ecuaţia are o infinitate de soluţii (x;y) unde : $x=3k+1,\ y=9k^3+9k^2+3k-1,\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

G:215. Aflaţi numărul raţional a, ştiind că $a(a+2)\sqrt{2}+\sqrt{2}$ **este număr raţional.**

Prof. **Ion Stănescu,** Smeeni

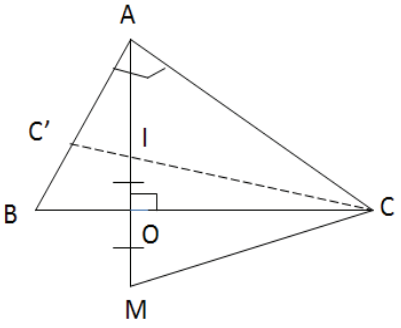
Rezolvare: $a(a+2)\sqrt{2}+\sqrt{2}=a^2\sqrt{2}+2a\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}(a^2+2a+1)=\sqrt{2}(a+1)^2$. Ştiind că $\sqrt{2}$ este iraţional, pentru ca $\sqrt{2}(a+1)^2$ să fie raţional trebuie ca a +1 să fie egal cu zero, prin urmare a = -1.

Mai există şi posibilitatea ca $(a+1)^2$ să fie o putere impară a lui $\sqrt{2}$ dar în această situație , a nu mai este raţional.

G :216. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu ipotenuza BC se construieşte simetricul M al centrului cercului înscris în triunghi față de latura [BC]. Arătați că triunghiul ACM este isoscel.

***Prof.* Marin Simion,** Rm. Sărat

Rezolvare :



Construim bisectoarele [CC'] şi [AO]. Triunghiul fiind isoscel AO este şi mediatoare . Obținem simetricul punctului **I** de intersecție al bisectoarelor prelungind segmentul [IO] cu [OM] astfel încât IO = OM . În triunghiul CIM , CO este mediatoare , deci triunghiul este isoscel de bază [IM] . $m(\widehat{CAM}) = 90^0 : 2 = 45^0$ deoarece unghiul $\widehat{BAC}$ este drept şi [AO] este bisectoare . Cum [CO] este şi bisectoare iar $m(\widehat{ICO}) = m(\widehat{OCM}) = 45^0 : 2 = 22^0 30'$ rezultă că $m(\widehat{ACM}) = 3 \cdot 22^0 30' = 67^0 30'$. Dar $m(\widehat{MAC}) = 45^0 \Rightarrow m(\widehat{AMC}) = 67^0 30' \Rightarrow \Delta AMC$ este isoscel.

G:217. Să se determine lungimea razei cercului circumscris unui triunghi, ştiind că măsurile unghiurilor sale sunt proporționale cu numerele 3, 4 şi 5 şi că perimetrul şi aria sa sunt numeric egale.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie ABC triunghi în care $\frac{m(\hat{A})}{3} = \frac{m(\hat{B})}{4} = \frac{m(\hat{C})}{5} = \frac{180^0}{12} = 15^0 \Rightarrow$

$m(\hat{A}) = 45^0, m(\hat{B}) = 60^0, m(\hat{C}) = 75^0$. Ducem $CD \perp AB$, $D \in (AB)$ şi notăm BD = x. Atunci,

BC = 2x, CD=DA= $x\sqrt{3}$, $AC = x\sqrt{6}$. Perimetrul $P_{ABC} = x(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$, iar aria $A_{ABC} = \frac{x^2(3+\sqrt{3})}{2}$

Din faptul că aria şi perimetrul sunt numeric egale rezultă $x(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}) = \frac{x^2(3+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow x = 2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

de unde $P_{ABC} = A_{ABC} = 12+4\sqrt{6}$.

Notăm cu O, centrul cercului circumscris trunghiului ABC. În triunghiul BOC, avem $BC = 2x = 2(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})$ şi $m(\widehat{BOC}) = 90^0$ (fiind unghi la centru şi arcul $\widehat{BC}$ are 90^0, căci $m(\widehat{BAC}) = 45^0$, care este unghi înscris); în plus, BO = CO = R, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Din $2R^2 = 4x^2 \Rightarrow R = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)$.

G:218. Se dă trapezul ABCD cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^0$, $AB = 11\sqrt{2}$, $CD = 2\sqrt{2}$ şi aria sa este egală cu $39\sqrt{2}$. Să se afle $m(\widehat{ACB})$.

***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Fie înălțimea $CE \perp AB$. Atunci, din $A_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot CE}{2} \Rightarrow CE = 6cm$.

Cum EB=AB - AE= $9\sqrt{2}$ din triunghiul dreptunghic CEB rezultă : BC= $3\sqrt{22}$. Conform teoremei reciproce a lui Pitagora aplicată în triunghiul ACB, rezultă că $m(\widehat{ACB}) = 90^0$.

G:219. Fie a, b, c, lungimile laturilor unui triunghi oarecare, ABC şi S_{ABC}, aria sa.

a) Să se arate că $S_{ABC} \le \frac{a^2+b^2}{4}$ b) Să se arate că $S_{ABC} < \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Fie h_a înălțimea din A, atunci, $S_{ABC} = \frac{a\cdot h_a}{2} \le \frac{a\cdot b}{2}$ căci $h_a \le b$ cu egalitate când $m(\hat{C}) = 90^0$.

Cum $\sqrt{a\cdot b}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Rightarrow S_{ABC}\le\frac{1}{2}ab\le\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}$. Cu egalitate când a= b şi $m(\hat{C})=90^0$.

b) De la punctul a) putem deduce $S_{ABC}\le\frac{a^2+b^2}{4}$, $S_{ABC}\le\frac{b^2+c^2}{4}$, $S_{ABC}\le\frac{a^2+c^2}{4}$. Cum ele nu se pot realiza simultan deoarece doar un unghi poate fi de 90^0, adunând aceste inegalităţi obţinem relaţia cerută.

Clasa a VIII – a

G:220. **Dacă a,b**$\in\mathbb{R}$**, atunci** $2\left(a^2-b^2\right)^2+4ab\left(ab-3\right)+9\ge 0$**.**

Prof. **Delia Naidin,** Caracal, Olt

Rezolvare: Inegalitatea se transcrie astfel:
$2\left(a^4+b^4\right)+9\ge 12ab$

Folosind succesiv inegalităţile: $2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2$ şi $x^2+y^2\ge 2xy$, avem:

$2\left(a^4+b^4\right)+9\ge\left(a^2+b^2\right)^2+9\ge\left(2ab\right)^2+3^2\ge 2\cdot 2ab\cdot 3=12ab$

G:221. **Arătaţi că aria figurii formată din punctele de coordonate (x ; y), unde** $|x|\le\sqrt{2},|y|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ **este exprimată printr-un număr natural pătrat perfect.** ***Prof.*** **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Se obţine un dreptunghi de arie 4.

G:222. Arătaţi că numerele A şi B, unde
A=$\sqrt{2^{2010}+2^{1006}+1}$ şi B=$\sqrt{2^{2010}-2^{1007}+2^{1006}+1}$ sunt numere naturale impare consecutive.

Prof. **Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare:
$\sqrt{2^{2010}+2^{1006}+1}=2^{1005}+1$; U($2^{1005}+1$)=3$\Rightarrow 2^{1005}+1$ impar
$\sqrt{2^{2010}-2^{1007}+2^{1006}+1}=2^{1005}-1$ U($2^{1005}-1$)=1$\Rightarrow 2^{1005}-1$ impar
Aşadar, numerele $2^{1005}-1$ şi $2^{1005}+1$ sunt impare consecutive, unde cu U(x) s-a notat ultima cifra a lui x.

G:223. Arătaţi că orice număr întreg se poate reprezenta sub forma $x^2+y^2-z^2$**, unde** $x,y,z\in Z$**.**

Prof. **Mihály Bencze**, Braşov

Rezolvare: Afirmaţia rezultă din egalităţile:
$(3n)^2+(4n-1)^2-(5n-1)^2=2n$, respectiv $(3n-1)^2+(4n-4)^2-(5n-4)^2=2n+1$.

G:224. Determinaţi partea întreagă a numărului real x , ştiind că :

$$x=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1225}+\sqrt{1224}}}{\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{900}+\sqrt{899}}}.$$

Prof. **Marin Simion**, Rm. Sărat

Rezolvare: Calculând valoarea expresiei de la numărător obţinem :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1225}+\sqrt{1224}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})}+\ldots\frac{\sqrt{1225}-\sqrt{1224}}{(\sqrt{1225}+\sqrt{1224})(\sqrt{1225}-\sqrt{1224})}=$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{1})^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1225}-\sqrt{1224}}{(\sqrt{1225})^2-(\sqrt{1224})^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots\frac{\sqrt{1225}-\sqrt{1224}}{1225-1224}==$$

$\sqrt{1225}-\sqrt{1}$ = 35 – 1 = 34. Analog , valoarea expresiei de la numitor este $\sqrt{900}-\sqrt{9}=27$.

Deducem că $x=\frac{34}{27}=1\frac{7}{27}$. Rezultă că partea întreagă a lui x este 1.

G:225. **Să se rezolve în N×N, ecuația :** $x^2=4y^2+3y+3$ **Prof. Constantin Apostol,** Rm. Sărat

Rezolvare:

Din $x^2=4y^2+3y+3 \Rightarrow x^2\rangle 4y^2 \Rightarrow x\rangle 2y \Rightarrow x\geq 2y+1 \Big| ()^2 \Rightarrow x^2\geq 4y^2+4y+1$

Atunci, $4y^2+3y+3\geq 4y^2+4y+1 \Leftrightarrow y\leq 2$ Se obține soluția $S=\{(5;2)\}$.

G:226. Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b,c **şi diagonala** $d=\sqrt{6}$ **.**

Calculați: $\min(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca})$**.** ***Prof.* Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Se foloseşte mai întâi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, apoi inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică iar la final se ține cont de faptul că $a^2+b^2+c^2=d^2$.

Rezultă: $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq \frac{1}{1+\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}}+\frac{1}{1+\frac{c^2+a^2}{2}}\geq$

$\geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{9}{3+6}=1$. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=\sqrt{2}$ (paralelipipedul este cub).

Rezultă $\min(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca})=1$.

G:227. Considerăm trei cuburi cu muchiile de lungimi a,b **şi** c **, unde** $a+b+c=k$**. Dacă suma ariilor bazelor cuburilor este egală cu suma volumelor acestora şi egală cu** k **, arătați că cele trei cuburi sunt identice.** ***Prof*. Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Din enunț rezultă relațiile: $\begin{cases}(1)a+b+c=k\\ a^2+b^2+c^2=k\Leftrightarrow (2)a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c=k\\ a^3+b^3+c^3=k\Leftrightarrow (3)a\cdot a^2+b\cdot b^2+c\cdot c^2=k\end{cases}$. Dacă adunăm prima ecuație cu a treia şi scădem ecuația a doua de două ori, după care grupăm convenabil şi dăm factor comun se ajunge la: $(a^2-2a+1)a+(b^2-2b+1)b+(c^2-2c+1)c=k+k-2k=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2a+(b-1)^2b+(c-1)^2c=0$.

Rezultă: $\begin{cases}(a-1)^2a=0\\ (b-1)^2b=0\\ (c-1)^2c=0\end{cases}$, şi de aici $a=b=c=1$, c.c.t.d.

G:228. Se dă prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C' cu AB = a şi AA' = b. Să se arate că planele (ABC') şi (BCA') sunt perpendiculare, dacă şi numai dacă, $3a^2=2b^2$.

***Prof.* Constantin Apostol**,Rm. Sărat

Rezolvare:

Fie $AC'\cap CA'=\{D\}$. Atunci, $(ABC')\cap(BCA')=BD$. Din motive de simetrie, perpendicularele din A şi C pe [BD] cad în acelaşi punct, M. Atunci, $(ABC')\perp(BCA')\Leftrightarrow m(\widehat{AMC})=90^0\Rightarrow \Delta AMC$ este dreptunghic isoscel.

Cum D este mijlocul laturii [AC'], rezultă $AC'=BC'=\sqrt{a^2+b^2}$, $BD=\frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$.

[AM] este înălțime în ΔABD, $A_{ABD}=\frac{BD\cdot AM}{2}=\frac{AM}{2}\cdot\frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$,

Pe de altă parte, $A_{ABC'} = 2A_{ABD} \Rightarrow \frac{a \cdot NC'}{2} = 2A_{ABD}$. Cum $NC' = \frac{\sqrt{3a^2+4b^2}}{2} \Rightarrow A_{ABD} = \frac{a\sqrt{3a^2+4b^2}}{8}$

Din egalarea celor două arii se scoate lungimea lui [AM] şi din $AM^2 + MC^2 = AC^2 \Rightarrow$ relaţia $3a^2 = 2b^2$.

Clasa a IX – a

L:127. **Să se demonstreze că** $\frac{1}{2^{2010} \cdot 2010!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot .... \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{\sqrt{2010}}$. ***Prof.* Andrei Dobre**, Ploieşti

Rezolvare: Fie $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ..... \cdot \frac{2009}{2010}$ şi $q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ..... \cdot \frac{2010}{2011}$. Atunci, $p \cdot q = \frac{1}{2011}$.

Cum $p < q \,|\cdot p \Rightarrow p^2 < p \cdot q = \frac{1}{2011} \Rightarrow p < \frac{1}{\sqrt{2011}} < \frac{1}{\sqrt{2010}}$.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ..... \cdot \frac{2009}{2010} = \frac{2010!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot ... \cdot 2010^2} = \frac{2010!}{(2^{1005} \cdot 1005!)^2} > \frac{1}{2^{2010} \cdot 2010!}$.

L:128. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ determinaţi $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\sqrt{x-1} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x}$

***Prof.* Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Leftrightarrow (1)\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}$

Din (1) prin adunare în ambii membri cu $\sqrt{n}$ obţinem :

(*) $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 3\sqrt{n} = \sqrt{9n}$

(**) $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 3\sqrt[3]{n^3 - n} > \sqrt{9n-1}$, prima inegalitate s-a obţinut din inegalitatea mediilor iar a doua inegalitate se obţine uşor prin ridicare la puterea a 6 –a.

Din (*) şi (**) avem $\sqrt{9n-1} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{9n}$.

Rezultă $x = 9n$.

L:129. Să se arate că : $\sum_{k=1}^{n} \frac{9k^2 + 21k + 13}{(9k^2 + 21k + 10)^3} = \frac{n(3n^2 + 15n + 25)}{125(3n+5)^3}$.

***Prof.* Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: $\sum_{k=1}^{n} \frac{9(9k^2 + 21k + 13)}{(9k^2 + 21k + 10)^3} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(3k+2)^3} - \frac{1}{(3k+5)^3} \right) = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{(3n+5)^3} = \frac{9n(3n^2 + 15n + 25)}{125(3n+5)^3}$.

L:130. Dacă $x, y, z > 0$ **arătaţi că** $\sqrt{3}(x + y + z) \geq \sqrt{x^2 + 2yz} + \sqrt{y^2 + 2zx} + \sqrt{z^2 + 2xy}$ **.**

***Prof.* Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: $(\sum_{cyclic} x)^2 = \sum (x^2 + 2yz) = \sum \left(\sqrt{x^2 + 2yz}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\sum \sqrt{x^2 + 2yz}\right)^2$ sau

$\sum x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sum \sqrt{x^2 + 2yz}$ şi în final $\sqrt{3} \cdot \sum x \geq \sum \sqrt{x^2 + 2yz}$.

L:131. Dacă x+y+z = 6, xy+yz+xz = 9, atunci x, y, z $\in [0, 4]$ **.**

***Prof.* Delia Naidin,** Caracal, Olt

Rezolvare: Avem $\begin{cases} y+z=6-x \\ y\cdot z=9-x\cdot(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=6-x \\ y\cdot z=9-6x+x^2 \end{cases} \Rightarrow t^2-(6-x)\cdot t+9-6x+x^2=0.$

cu $t\in\mathbb{R}$. Atunci, $\Delta_t=-3x^2+12x\geq 0\Leftrightarrow x\in[0,4]$. Analog deducem y, z$\in[0,4]$.

L:132. Aflați pătratul sumei rădăcinilor ecuației: $x^2\cdot\left[\left(\sqrt{2}-x\right)^2+2\sqrt{2}x-2x^2\right]+[x]=0$**, unde [x] este partea întreagă a lui x.** ***Prof***. **Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare: Notăm [x]=k. Avem $k\in\mathbb{Z}$ şi $x^4-2x^2-k=0$. Rezultă $x^2=1\pm\sqrt{1+k}$ cu k≥ -1, $k\in\mathbb{Z}$

Pentru k= -1 avem $x^2=1$ şi deci x=± 1, verifică numai $x_1=-1$.

Pentru k=0 avem x=0 sau x=2, verifică numai $x_2=0$. Pentru k$\in\mathbb{N}^*$ convine numai $x^2=1+\sqrt{1+k}$.

Deoarece [x]=k$\geq$1 rezultă x $\geq$1 adică x$=\sqrt{1+\sqrt{1+k}}$ .Deoarece [x]$\leq$x avem k$\leq\sqrt{1+\sqrt{1+k}}$ adică $k^2-1\leq\sqrt{k+1}\Leftrightarrow(k-1)^2(k+1)^2\leq k+1\Leftrightarrow(k-1)^2(k+1)\leq 1.$ Convine numai k=1 şi deci $x_3=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Avem S$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=\left(-1+0+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

L:133. Cel mai mic dintre unghiurile unui poligon convex măsoară 78^0. Aflați numărul laturilor poligonului ştiind că măsurile unghiurilor sale sunt în progresie aritmetică de rație 4.

Prof. **Constantin Dinu,** Buzău

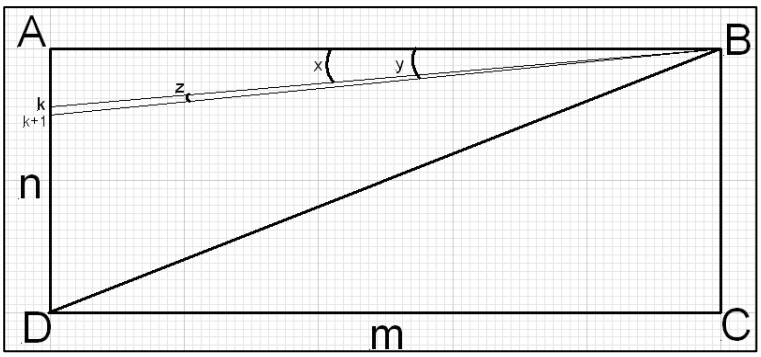
Rezolvare: Fie cel mai mic unghi de măsură $a_1=78^0$. Atunci al k –lea unghi are măsura $a_k=78^0+(k-1)\cdot 4$. Suma celor n măsuri ale unghiurilor poligonului este suma unei progresii aritmetice şi este egală cu $\frac{[78^0+78^0+(n-1)4]\cdot n}{2}=(n-2)\cdot 180^0$. Rezultă ecuația $n^2-27n+180=0$ de unde se obțin soluțiile $n_1=12$ şi $n_2=15$ adică putem avea un poligon cu 12 sau 15 laturi.

L :134. a) Fie n, m$\in\mathbb{N}^*$**. Să se demonstreze că :** $\sum_{k=0}^{n-1} arctg\frac{m}{m^2+k(k+1)}=arctg\frac{n}{m}$

b) Să se arate că : $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{8}=arctg2$ ***Prof.*** **Ciprian Cheşcă,** Buzău

Rezolvare :

Fie un dreptunghi ABCD cu dimensiunile AB = m, AD = n, conform figurii alăturate. Se consideră două puncte situate la distanța k respectiv k+1 față de punctul A pe latura [AD]. Unind punctele k, k+1 cu punctul B se formează două unghiuri pe care le notăm cu x respectiv y, iar unghiul $\widehat{kBk+1}$ îl notăm cu z. În mod evident avem z = y-x ; Putem scrie relatiile :



$tg\,x=\frac{k}{m}$;

$tg\,y=\frac{k+1}{m}$;

de unde obținem :

$$tg\,z=tg(y-x)=\frac{tg\,y-tg\,x}{1+tg\,y\cdot tg\,x}=\frac{\frac{k+1}{m}-\frac{k}{m}}{1+\frac{k+1}{m}\cdot\frac{k}{m}}=\frac{m}{m^2+k\cdot(k+1)}$$

şi $z = \operatorname{arctg}\dfrac{m}{m^2 + k\cdot(k+1)}$ (1)

Dar suma tuturor unghiurilor z când k ia valorile de la 0 la n-1 este chiar măsura unghiului $\widehat{ABD}$, adică arctg (n/m). Însumând relația (1) după k cu valori de la 0 la n-1 obținem relația cerută.

Observație : Pentru n = m se obține relația : $\sum_{k=0}^{n-1} arctg\dfrac{n}{n^2+k(k+1)} = \dfrac{\pi}{4}$

b) Este un caz particular al relației propuse la problema precedentă. Dacă se alege m = 2 şi n = 4, după efectuarea calculelor se va obține relația cerută.

L:135. Să se demonstreze că în orice triunghi avem:

$$\frac{(p-b)(p-c)}{a^2}+\frac{(p-c)(p-a)}{b^2}+\frac{(p-a)(p-b)}{c^2}\le\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Să se precizeze când avem egalitate.

Prof. **Constantin Rusu,** Rm. Sărat

Rezolvare: Vom dovedi că $\dfrac{(p-b)(p-c)}{a^2}\le\dfrac{bc}{(b+c)^2}$. (1)

După câteva calcule algebrice avem că:

$\dfrac{(p-b)(p-c)}{a^2}\le\dfrac{bc}{(b+c)^2}\Leftrightarrow(b-c)^2(a-b-c)(a+b+c)\le 0$, ceea ce este adevărat.

Se observă că pentru $b=c$ avem egalitate.

Analog se arată $\dfrac{(p-c)(p-a)}{b^2}\le\dfrac{ca}{(a+c)^2}$ (2) şi $\dfrac{(p-a)(p-b)}{c^2}\le\dfrac{ba}{(b+a)^2}$. (3)

Prin adunarea relațiilor (1),(2) şi (3) rezultă ceea ce trebuia demonstrat

Egalitate se realizează în cazul triunghiului echilateral.

Remarcă. Dacă înmulțim relația (1) cu $4p(p-a)$ şi apoi extragem radical din ambii membri găsim $\dfrac{2S}{a}\le\dfrac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}\Leftrightarrow h_a\le l_a$. Egalitatea are loc dacă $b=c$.

Clasa a X – a

L:136. **Dacă** $x,y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ **arătați că** $\sqrt{(2+\sin^2 x)(2+\cos^2 y)}+\sqrt{(2+\cos^2 x)(2+\sin^2 y)}\ge\dfrac{1}{2}\cdot\big(9+\sin(x+y)\big)$.

Prof. **Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: Avem inegalitatea $(*)\ (2+a^2)(2+b^2)\ge\left(2+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)^2$, $\forall a,b>0$

şi $a+b\le 2$. Inegaliatea este echivalentă cu $(a-b)^2(16-(a+b)^2-4ab)\ge 0$, adevărată.

(1) $a=\sin x, b=\cos y\overset{(*)}{\Rightarrow}(1')\sqrt{(2+\sin^2 x)(2+\cos^2 y)}\ge 2+\left(\dfrac{\sin x+\cos y}{2}\right)^2$;

(2) $a=\cos x, b=\sin y\overset{(*)}{\Rightarrow}(2')\sqrt{(2+\cos^2 x)(2+\sin^2 y)}\ge 2+\left(\dfrac{\cos x+\sin y}{2}\right)^2$.

După adunarea inegalităților $(1')$ şi $(1')$ rezultă c.c.t.d.

L:137. Să se rezolve ecuația: $\log_4 x \cdot \log_9 (19-x) = 1$. ***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare : Se pun condițiile de existență: $x\rangle 0,\ 19-x\rangle 0 \Rightarrow x \in (0;19)$

Pentru $x \in (0;1) \Rightarrow 19-x\rangle 18 \Rightarrow \log_4 x\langle 0,\ \log_9(19-x)\rangle 0 \Rightarrow\ \log_4 x \cdot \log_9(19-x)\langle 0.$

Pentru x= 1 rezultă 0 =1, absurd.

Pentru $x\rangle 1 \Rightarrow \log_9(19-x) = \log_x 4 \Rightarrow 19-x = 9^{\log_x 4} \Rightarrow 19-x = (9^{\ln 4})^{\frac{1}{\ln x}}$. Cum funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = a^{\frac{1}{\ln x}}$ este strict convexă, unde $a = 9^{\ln 4}\rangle 1$ rezultă că ecuația dată are cel mult două soluții. Se observă că acestea sunt $x_1 = 3, x_2 = 16.$

L:138. Se dau numerele $a = \sqrt{5-2\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-2)^{-1}$ **şi** $b = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{-32} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Să se calculeze (b-a)^2. **Prof. Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare : a= -3 ; $b = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1$. Atunci, $b-a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2 \Rightarrow (b-a)^2 = 6\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4} + 8$.

L:139. Aflați x din egalitatea: $\sum_{k=1}^{99} (k+1)\cdot 3^k = \frac{x\cdot 3^{100}-3}{4}$. ***Prof.* Iuliana Traşcă**, Olt

Rezolvare: Pentru $x \neq 1$ avem $\sum_{k=1}^{99} x^{k+1} = x^2 \cdot \frac{x^{99}-1}{x-1} = \frac{x^{101}-x^2}{x-1}$. Derivăm şi obținem:

$\sum_{k=1}^{99} (k+1)\cdot x^k = \frac{(101x^{100}-2x)(x-1)-x^{101}+x^2}{(x-1)^2}$. Pentru x=3, $\sum_{k=1}^{99} (k+1)\cdot 3^k = \frac{199\cdot 3^{100}-3}{4}$ şi deci x=199.

L:140. **Rezolvați ecuația** $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2^{1-y^2}$. ***Prof.* Andrei Dobre**, Ploieşti

Rezolvare: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2 \Rightarrow 2^{1-y^2} = 2 \Rightarrow y = \pm 1, x = \pm 1.$ $S = \{(1;1),(-1;-1),(-1;1),(1;-1)\}$.

Clasa a XI – a

L:141. **Să se calculeze limita** $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(2+\sqrt{x}+2^x)}{\log_3(3+\sqrt[3]{x}+3^x)}$. ***Prof.* Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare : $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(2+\sqrt{x}+2^x)}{\log_3(3+\sqrt[3]{x}+3^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 2^x(1+\frac{\sqrt{x}}{2^x}+\frac{2}{2^x})}{\log_3 3^x(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{3^x}+\frac{3}{3^x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\log_2(1+\frac{\sqrt{x}}{2^x}+\frac{2}{2^x})}{x+\log_3(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{3^x}+\frac{3}{3^x})} = 1$.

L:142. Arătați că ecuația: $(1+\sqrt{1+\lg^2 x})\lg x + x(1+\sqrt{1+x^2}) = 0$**, are o singură soluție în intervalul** $(0,1)$. ***Prof.* Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t) = t(1+\sqrt{1+t^2})$, continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu $f'(t) = 1 + \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbf{R}$. De unde rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ şi, prin urmare injectivă. Se mai observă că $f(-t) = -f(t),\ \forall t \in \mathbf{R}$, deci f este o funcție impară.

Astfel, ecuația devine :

$f(\lg x)+f(x)=0 \Rightarrow f(\lg x)=-f(x) \overset{f=impara}{\Rightarrow} f(\lg x)=f(-x) \overset{f=injectiva}{\Rightarrow} \lg x=-x$, o ecuație cu o unică soluție reală în intervalul $(0,1)$.

L:143. Unui elev i se scrie pe tablă matricea $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 3 & * \\ 2 & * & 7 \end{pmatrix}$**. Profesorul îi cere să înlocuiască asteriscurile cu numere întregi astfel încât după completare, suma tuturor elementelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi de pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil acest lucru ?. În caz afirmativ, ce matrice obține elevul ?** ***Prof.*** **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare. Dacă elevul notează cu x elementul de pe linia 3 coloana 2 obține matricea $A=\begin{pmatrix} x-1 & 6 & x+4 \\ 8 & 3 & -2 \\ 2 & x & 7 \end{pmatrix}$. Din x-1 +6 + x+4 = x+9 rezultă x=0 şi astfel $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

L:144. Dacă $A,B\in M_2(R)$ **arătați că** $(AB-BA)^2=(\det(AB+BA)-4\det AB)I_2$**.**

Prof. **Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: Din teorema Cayley-Hamilton avem

$(AB-BA)^2-(AB-BA)Tr(AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=0$, dar

$Tr(AB-BA)=Tr(AB)-Tr(BA)=0 \Rightarrow (1)(AB-BA)^2+\det(AB-BA)I_2=0.$

$(2)\det(AB+BA)+\det(AB-BA)=2(\det AB+\det BA)=4\det AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(AB-BA)=4\det AB-\det(AB+BA)\overset{(1)}{\Rightarrow} Q.E.D.$

L :145. Să se ridice la puterea $n\in\mathbb{N}$, **matricele:**

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$; ***

Rezolvare : a) Prin inducție se arată că $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n\sqrt{2} & n^2 \\ 0 & 1 & n\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) Deoarece $A=B+\sqrt{3}I_3$ unde

$B=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ atunci $A^n=(B+\sqrt{3}I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k B^k\cdot(\sqrt{3}I_3)^{n-k}=$

$=\sqrt{3}^n I_3+n\sqrt{3}^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{3}^{n-2}B^2$ deoarece $B^3=O_3$, $B^4=O_3$, ….

Clasa a XII – a

L: 146. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ **se definește legea de compoziție prin** $x\circ y=2xy-2x-2y+3$**.**

a) Calculați $\underbrace{x\circ x\circ x.....\circ x}_{2010\ termeni}$**. Generalizare.**

b) Pe tablă sunt scrise numerele -2010, -2009, …0, 1, 2, …2009, 2010. Se şterg două numere a şi b şi în locul lor se scrie numărul 2ab -2a -2b +3. Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr ?

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare : a) $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$. Se demonstrează prin inducție $\underbrace{x \circ x \circ x.....\circ x}_{2010\ termeni} = 2^{n-1}(x-1)^n + 1$.

b) Ultimul număr este $x = 2(x_1-1)(x_2-1).....(x_{4021}-1)+1$ unde $x_i, i = \overline{1,4021}$ sunt numerele de pe tablă. Cum există un indice i astfel încât $x_i = 1$ rezultă că ultimul număr este x=1.

L:147. **Dacă** $f : R \to R$ **astfel încât** $f(x)+f(-x)=1, \forall x \in [-1,1]$ **calculați** $\int_{-1}^{1} \frac{(x^4+1)f(x)}{x^6+1}dx$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

Rezolvare:

$$(1)\ I = I_1 + I_2 = \int_{-1}^{0} \frac{(x^4+1)f(x)}{x^6+1}dx + \int_{0}^{1} \frac{(x^4+1)f(x)}{x^6+1}dx;$$

$$(2)\ I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{(x^4+1)f(x)}{x^6+1}dx = \int_{-1}^{0} \frac{(t^4+1)f(-t)}{t^6+1}(-dt) = \int_{0}^{1} \frac{(x^4+1)f(-x)}{x^6+1}.$$

Din (1),(2) şi $f(x)+f(-x)=1$

rezultă $I = \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx = \left(arctgx + \frac{1}{3}arctgx^3 \right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

L :148. **Fie** $P(x) = \sum_{k=0}^{7} x^k$ **, cu rădăcinile x₁, x₂,..., x₇ şi** $T = \sum_{k=0}^{7} \frac{10}{x_k - 7}$ **. Ce valoare are T ?**

Prof. **Naidin Delia**, Olt

Rezolvare: Avem $P(x) = x^7 + x^6 + ... + x + 1 = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_7)$

Pentru $x \neq 1$ avem : $\frac{x^8-1}{x-1} = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_7)$

Derivând avem : $\frac{7x^8-8x^7+1}{(x-1)^2} = P(x)\left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + ... + \frac{1}{x-x_7} \right)$

Pentru x=7 rezultă $\frac{7\cdot 7^8 - 8\cdot 7^7 + 1}{(7-1)^2} = \frac{7^8-1}{7-1}\left(\frac{1}{7-x_1} + \frac{1}{7-x_2} + ... + \frac{1}{7-x_7} \right)$

Dar $\frac{1}{7-x_1} + \frac{1}{7-x_2} + ... + \frac{1}{7-x_7} = -\frac{T}{10}$ deci, $T = \frac{205\cdot 7^7 + 5}{3(1-7^8)}$.

L:149. **Demonstrați ingalitatea:** $\int_a^b e^{2x^2}dx > \frac{3}{4}\cdot \frac{e^{b^2}-e^{a^2}}{b^3-a^3}$**, unde** $a,b \in \mathbb{R}$ **şi** $a \neq b$**.**

***Prof.* Constantin Rusu**, Rm. Sărat

Rezolvare: Inegalitate din enunț se rescrie astfel:

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)\int_a^b (e^{x^2})^2 dx > \left[\frac{1}{2}\left(e^{b^2} - e^{a^2} \right) \right]^2 \Leftrightarrow \int_a^b x^2 dx \cdot \int_a^b \left(e^{x^2} \right)^2 dx > \left[\frac{1}{2}\left(e^{b^2} - e^{a^2} \right) \right]^2.$$

Din inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz avem :

$$\int_a^b x^2 dx \cdot \int_a^b \left(e^{x^2} \right)^2 dx > \left[\frac{1}{2}\int_a^b e^{x^2}\left(x^2 \right)' dx \right]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{b^2} - e^{a^2} \right)^2,$$

Observație. Nu avem egalitate deoarece $e^{x^2} \neq 0, \forall x \in R$ şi $x^2 \neq ke^{x^2}$.

**„ Înainte să vă supărați pe cel care vă pune la treabă,
amintiți-vă că fără presiune nu se formează diamantele”.**

Mary Case

5. Probleme propuse

▪ *ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR*

P:174. Doi copii se joacă cu nişte jetoane pe care sunt scrise numerele: 9x9, 10x10, 11x11, 12x12, 13x13, 14x14. După ce stabilesc ordinea de începere fiecare ia pe rând câte un jeton, un jeton trebuind să rămână pe masă. La sfârşit ei constată că sumele înscrise pe jetoanele alese sunt egale. Ce jeton a rămas pe masă ?

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

P:175. Suma a trei numere naturale este 2063. Dacă la fiecare se adună acelaşi număr se obțin numerele 45, 47, şi 2031. Aflați cele trei numere naturale.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

P:176. Dacă se aşează câte un elev în bancă, rămân zece elevi în picioare, iar dacă se aşează câte doi elevi într-o bancă, rămân două bănci libere. Câți elevi şi câte bănci sunt ?

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

P:177. Andrei a citit 126 de pagini dintr-o carte. Fratele său citeste o şesime din acestea, iar sora lor patru doimi din paginile citite de cei doi împreună. Câte pagini au citit cei trei frați?

Prof. **Mirela Axente**, Buzău

P:178. Două bucăți de mătase aveau aceeaşi lungime. Dupa ce s-au vandut 18 metri dintr-o bucată si 25 de metri din cealaltă, în prima bucata a ramas de două ori mai multă mătase. Câți metri de mătase au fost în fiecare bucată?

Prof. **Mirela Axente**, Buzău

P:179. Dacă un autoturism merge cu viteza constantă de 80Km/h fără întrerupere, atunci ce distanță parcurge în 4 ore şi 30 de minute?

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

P:180. Se dă şirul de numere: 2; 3; 5; 8; 12; 17; …… Care este al zecelea termen al şirului ?

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

P:181. Găsiți mulțimea numerelor naturale “n”, ştiind că acesta (n) este un număr natural scris cu 3 cifre, în care cifra zecilor este 5, iar cifra unităților este 8.

Inst. **Anton Maria,** Berca

P:182. Calculați şi aflați pe rând care este diferența dintre cel mai mare şi cel mai mic număr ce se poate scrie cu două dintre cifrele următoarelor numere: 765; 791; 823; 194.

Inst. **Anton Maria,** Berca

P:183. Într-o cutie sunt 36 de figuri geometrice, pătrate şi dreptunghiuri, galbene şi roşii. Dintre acestea 12 sunt dreptunghiuri, 16 nu sunt roşii, iar 13 pătrate nu sunt galbene. Câte dreptunghiuri nu sunt galbene în cutie?

Prof. **Brânză Cristian Cosmin,** Bădila, Pârscov

P:184. Taie ce nu se potriveşte, rescrie problema apoi rezolvă:
a)Un gospodar avea 34 de oi albe, cu 18 mai multe oi negre şi 54 de capre. Câte oi avea, în total, gospodarul?

b)Maria are în colecţia sa 54 de timbre. Ana îi oferă cu 17 mai puţine timbre, iar George 15 ghiocei. Câte timbre are acum Maria? ***Înv.* Ion Daniela,** Berca

P:185. Un număr de trei cifre are cifra zecilor cât dublul cifrei sutelor şi de 4 ori mai mare decât cifra unităţilor. Suma celor trei cifre este 14. Care este numărul? ***Înv.* Lupşan Ion, Pleşcoi,** Berca

P:186. Într-o seră au înflorit timp de o săptămână 7 094 de flori. Ştiind că în fiecare zi au înflorit triplul şi încă 3 flori decât în ziua precedentă, să se afle câte flori au înflorit în prima zi.

***Prof.* Lupşan Nicoleta Gabriela,** Berca

P:187. Se ştie că 17 muncitori lucrează în 31 de zile 13 175 m plasă.
Câţi metri de plasă vor lucra în 15 zile 38 de muncitori?

***Înv.* Marchidanu Florica,** Berca

P:188. Lungimea unui dreptunghi este cu 10 m mai mare decât triplul lăţimii sale.
Aflaţi laturile dreptunghiului ştiind că perimetrul său este 780 m.

***Înv.* Marchidanu Florica,** Berca

P:189. Tatăl, mama şi cei 2 copii gemeni au împreună 78 de ani. Aflaţi vârsta fiecăruia ştiind că: vârsta tatălui este egală cu produsul numerelor 2, 3 şi 6, iar mama este cu 4 ani mai mică decât tatăl.

***Prof.* Marinescu Gabriela**, Stăncești,Vadu Paşii

P:190. Într-o clasă sunt 8 fete şi de două ori mai mulţi baieţi. A treia parte din numărul elevilor clasei practică înotul, un sfert din restul elevilor practică atletism, iar restul joacă baschet. Aflaţi numărul elevilor care joacă baschet.

***Prof.* Marinescu Gabriela**, Stăncești,Vadu Paşii

P:191. Din triplul unui număr natural scădem 45. Triplăm rezultatul, apoi îl micşorăm cu 6, obţinând un număr format din 3 cifre a căror sumă este 12, cifra sutelor este identică cu cifra zecilor, iar cifra unităţilor este dublul cifrei zecilor. Care este numărul?

***Elev* Necula Teodor Alexandru**
***Prof.* Vrabie Marioara,** Berca

P:192. Suma a cinci numere este 624. Primele 4 numere sunt consecutive pare, ultimul număr este dublul celui de-al patrulea. Care sunt numerele?

***Elev* Necula Teodor Alexandru**
***Prof.* Vrabie Marioara,** Berca

- ***GIMNAZIU***

Clasa a V – a

G:229. Să se scrie numărul $5^{2011}+10$ ca suma de cinci numere naturale pare consecutive.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

G:230. Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ şi $A = 5a + 7b + 6c$, $B = 3a + 2b + 8c$. Se cere:
a) Calculaţi A+ 2B şi 3A – B;
b) Dacă A este divizibil cu 11 demonstraţi că B este divizibil cu 11;
c) Dacă B este divizibil cu 11 este adevărat că A este divizibil cu 11 ?

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

G:231. Dintr-un carton se taie şase bucăţi dreptunghiulare pentru a se construi o cutie de chibrituri. Se măsoară perimetrele lor şi se obţine: 8cm, 16 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm, 12 cm. Aflaţi suma ariilor celor şase bucăţi dreptunghiulare.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

G:232. Aflaţi numerele de patru cifre (diferite între ele) care se termină cu 2, sunt multiplii de 4 şi au suma cifrelor 2^4.

***Prof.* Mariana Mitea**, Cugir, Alba

G:233. În două cupoane sunt $128\frac{1}{4}m$ de stofă. Câți metri sunt în fiecare cupon dacă $\frac{2}{5}$ din primul este tot atât cât $\frac{4}{9}$ din al doilea. ***Prof.* Tuță Luca**, Buzău

G:234. Să se demonstreze că există un unic număr natural n astfel încât numărul $3^{10}+88\cdot 3^6+3^n$ să fie pătrat perfect.

***Prof.* Adrian Stan**,Buzău

G:235. La etapa pe centru a Olimpiadei de matematică au participat 90 de elevi la clasa a VIII-a. 80 de elevi au rezolvat prima problemă, 75 de elevi au rezolvat problema a doua, 70 de elevi au rezolvat problema a treia şi 53 de elevi au rezolvat problema a patra. Arătați că cel puțin opt elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:236. Determinați numerele prime x, y, z astfel încât $x+5y+13z=132$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:237. Să se arate că numărul N = $\overline{ab61}+22\,\overline{ab}$ este divizibil cu 61. **Prof. Violeta Corbu**, Buzău

Clasa a VI – a

G:238. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația: $2x+3y-xy=0$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Rm. Sărat

G:239. Determinați raportul $\frac{a}{b}$ ştiind că $\frac{a-13}{b}=\frac{a}{b+7}$, unde $a,b\in\mathbb{N}^*$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

G:240. Fie $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}$ şi $\frac{b}{8}=\frac{c}{10}$ $(a,b,c\in Q)$.

a) Determinați numerele m şi n astfel încât să avem: $\frac{a}{m}=\frac{b}{48}=\frac{c}{n}$

b) Determinați numerele a,b şi c ştiind că $a+b+c=105$.

***Prof.* Tuță Luca**, Buzău

G:241. Un obiect costă 3600 lei. Se majorează prețul produsului cu 20% şi apoi se reduce cu p% din prețul majorat. Acum prețul produsului este de 3672 lei. Determinați procentul cu care s-a redus prețul.

***Prof.* Cornelia Gurău**, Moineşti, Bacău

G:242. Determinați două numere întregi direct proporționale cu 2010 şi 49 ştiind că suma pătratelor lor este 16170004.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

G:243. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația: $6x^2+7x-3xy+4y=32$.

***Prof.* Mariana Mitea**, Cugir, Alba

G:244. Aflați numerele naturale x, y, z, t ştiind că suma lor este 2011 şi $5x=10y=\frac{z}{2}=t-361$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:245. Se dă $\frac{x+y}{2x+z}=\frac{y+z}{2y+z}=\frac{z+x}{2z+x}$. Calculați $\frac{2x+3y+5z}{7x+11y+13z}$. ***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Berca

G:246. Cu 3 puncte distincte se poate construi un triunghi. Cu 4 puncte distincte se pot construi 2 triunghiuri fără puncte interioare comune. Câte triunghiuri, fără puncte interioare comune, se pot construi cu 2010 puncte distincte ? ***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni

G:247. Determinați șase numere naturale a căror sumă este 2010 și sunt direct proporționale cu șase numere naturale consecutive . ***Prof.* Simion Marin**, Râmnicu Sărat

G:248. Fie unghiul $\sphericalangle XOY$ cu $m(\sphericalangle XOY)=20^0$ și punctele $A,B,C\in(OX$ în această ordine, $A\in(OB)$, $M,N\in(OY$ astfel încât $M\in(ON)$ și $[OA]\equiv[AM]\equiv[MB]\equiv[BN]\equiv[NC]$. Arătați că $[OC]\equiv[ON]$.

***Prof.* Valerica Roşu,** Rm. Sărat

G:249. Arătați că dacă numerele a, b, c, d sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5, 6 atunci are loc relația: $a^3+b^3+c^3=d^3$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:250. Determinați numerele naturale nenule x,y,p și q $(p\geq 2, q-p\geq 1)$ care verifică: $x^p-x^{q-p}=2$ și $y^p-x^q=1$.

***Prof.* Jamel Ghanouchi,** Tunisia

G:251. Să se determine măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, știind că suma măsurilor a trei unghiuri exterioare ale acestui triunghi este egală cu 320^0.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Clasa a VII – a

G:252. Să se demonstreze identitatea: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ și apoi dovediți că n^2+n+2 divide n^6-5n^3+8 $\forall n\in N$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

G:253. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}^3$ ecuația $xyz-3xy+2xz+yz-6x-3y+2z=12$.

***Prof.* Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

G:254. Determinați $x\in\mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{x^2+27x+160}\in\mathbb{N}$

***Prof.* Delia Naidin,** Caracal, Olt

G:255. Rezolvați ecuația $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+....+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2000}{1001}$ în $\mathbb{N}^*$.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

G:256. Arătați că dacă $N=a^2+b^2$ $(a,b\in\mathbb{Z}^*)$, atunci $2N$ și N^2 sunt sume de pătrate perfecte.

***Prof.* Tuță Luca**, Buzău

G:257. Fie $A=\frac{1}{2011^2+1}+\frac{1}{2011^2+2}+....+\frac{1}{2011^2+2011}$. Să se arate că $2011<\frac{1}{A}<2012$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:258. Pe diagonala [AC] a dreptunghiului ABCD cu AB = 16 cm și BC =12 cm, se ia punctul E astfel încât AE = 3EC. Să se afle distanța de la E la BD. ***Prof.* Cornelia Gurău**, Moineşti, Bacău

G:259. În triunghiul ABC, M este mijlocul înălțimii (AD), $D\in(BC)$ și , fie $E\in(AC)$, astfel încât , EC = 2 AE. Să se arate că dacă B, M și E sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este isoscel.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Clasa a VIII – a

G:260. Să se aducă la o formă mai simplă $(9+8)\left(9^2+8^2\right)\left(9^4+8^4\right)\left(9^8+8^8\right)...\left(9^{1024}+8^{1024}\right)$.

Prof. **Delia Naidin,** Caracal, Olt

G:261. Comparați numerele a şi b unde:

$$a=\frac{1}{\sqrt{2009}}+\frac{1}{\sqrt{2010}}+\frac{1}{\sqrt{2011}},\ b=\frac{\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}\cdot\sqrt{2011}}+\frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2011}\cdot\sqrt{2009}}+\frac{\sqrt{2011}}{\sqrt{2009}\cdot\sqrt{2010}}.$$

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

G:262. Determinați $x\in\mathbb{R}_+^*$ ştiind că $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$. ***Prof.*** **Tuță Luca**, Buzău

G:263. Determinați valoarea maximă a fracției $F(x)=\frac{46x^2-2392x+31145}{x^2-52x+677}$ şi aflați valoarea reală a lui x pentru care se obține acest maxim.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:264. Arătați că nu există funcții f astfel încât $f(x)+f(5-x)=4x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:265. Fie expresia $E(x)=|x|+|x-1|+|x-2|+...+|x-2011|,\ x\in\mathbb{R}$.

Să se determine $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}E(x)$ şi pentru ce valori ale lui x se realizează acesta.

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

G:266. Arătați că numărul $A=7^{2011}+8^{2011}+9^{2011}$ este divizibil cu 48.

(În legătură cu problema $G:165$, propusă de *Gheorghe Dârstaru*.)

Prof. **Titu Zvonaru,** Comăneşti

G:267. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația: $x^2y-6=3x^2+y$. ***Prof.*** **Gheorghe Dârstaru**, Berca

G:268. Să se rezolve sistemul în $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: $\begin{cases}x+y=\frac{109}{4}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{13}{2}\end{cases}$. ***Prof.*** **Ion Stănescu**, Smeeni

G:269. Să se găsească minimul expresiei $E=a^2+b^2+c^2-\frac{4}{3}(a+b+c)$.

Prof. **Ligia şi Gheorghe Struțu**, Buzău

Clasa a IX – a

L:150. Dacă $a,b\in\mathbb{R}^*$ şi $9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-42\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+67\le 0$. Să se arate că $6a=b(7+\sqrt{13})$ sau $6b=a(7+\sqrt{13})$. ***Prof.*** **Constantin Dinu,** Buzău

L:151. Dacă $a,b>0$ şi $ab\le 1$ arătați că $(a+b+2)^2\ge 4(a+b)(ab+1)$

Prof. **Mihály Bencze**, Braşov

L:152. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x+2010$. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(g(x))=-24x+48191$.

Prof. **Mircea Mario Stoica**, Arad

L:153. Determinați partea întreagă a numărului:
$A=3n+2(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}), n\in\mathbb{N}^*)$ ***Prof.*** **Neculai Stanciu**, Buzău

L:154. Fie $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $(f\circ f)(x)=\frac{3x+1}{x+3}$, $\forall x\in[-1;1]$. Să se arate că $f(-1)+f(1)=0$.

Prof. **Adrian Stan**, Buzău

L:155. Să se demonstreze că, dacă cel puțin unul din numerele a, b, c, d este diferit de zero, are loc inegalitatea $\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}+\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{4}{3}$.

Prof. **Violeta Corbu**, Buzău

L:156. Să se calculeze expresia: $\mathrm{E}=\frac{2\cos 14^\circ\sin 10^\circ-\sin 24^\circ}{\cos 86^\circ}$.

Prof. **Delia Naidin,** Caracal, Olt

L:157. Să se rezolve ecuațiile: a) $\cos x=y^2-2y+2$; b) $\cos x=y^4-4y^2+5$.

Prof. **Gherghina Manea**, Buzău

L:158. Arătați că dacă $a,b,c\in[1,\infty)$ sunt laturile unui triunghi, atunci $\frac{a^{1/a}\cdot b^{1/b}+b^{1/b}\cdot c^{1/c}+c^{1/c}\cdot a^{1/a}}{a^{2/a}+b^{2/b}+c^{2/c}}>\frac{1}{2}$.

Prof. **José Luis Díaz-Barrero,** Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

L:159. Calculați suma: $7+19+37+\ldots+(3n^2+3n+1)$ prin două metode.

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:160. Calculați: $S=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}-\frac{4}{27}+\ldots-\frac{2010}{3^{2009}}$. ***Prof.*** **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

L:161. Demonstrați că dacă a,b şi c sunt laturile unui triunghi, atunci are loc

i) $\left(\sum\frac{a}{b+c-a}\right)-3=2\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}$;

ii) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3+2\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2\right]$.

Prof. **Titu Zvonaru,** Comănești **şi *prof.*** **Neculai Stanciu,** Buzău

L:162. Fie $x=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2010\cdot 2011}$, $y=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2009\cdot 2010}$. Arătați că $x<\frac{1005}{2011}<y$

Prof. **Ligia şi Gheorghe Struțu**, Buzău

Clasa a X – a

L:163. Determinați funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ care îndeplinește simultan condițiile:
1) f(2012)= 2013;
2) $f(x+1)=f(x)+\frac{1}{1006},\forall x\in\mathbb{N}.$ ***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:164. Fie n şi m numere naturale. Calculați suma: $\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n+m}3^k\sum_{i+j=k}C_n^iC_m^j$.

***Prof.* José Luis Díaz-Barrero,** Polytechnical University of Catalonia, Barcelona, Spain

L:165. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sin x=\sum_{k=0}^{6}\cos\frac{2k\pi}{7}$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:166. Dacă $0<a_k\le b_k$ şi $x_k\in[a_k,b_k]$ $(k=1,2,...,n)$ arătați că:
$\log_{x_1}((a_2+b_2)x_2-a_2b_2)+\log_{x_2}((a_3+b_3)x_3-a_3b_3)+...+\log_{x_n}((a_1+b_1)x_1-a_1b_1)\ge 2n$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

L:167. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $5^{\log_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9;$

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:168. Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, să se demonstreze inegalitățile:
$1)1+\frac{4}{27abc}\ge\frac{3}{a+b+c};2)1+\frac{2}{27abc}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}.$

***Prof.* Titu Zvonaru**, Comăneşti

L:169. Să se rezolve ecuația: $2\cdot343^x-3\cdot98^x+10\cdot28^x-14\cdot8^x=0$

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Scornicești, Olt

Clasa a XI – a

L:170. Fie matricea $A_{a,b}=\begin{pmatrix}4&1&1\\8&2&2\\4a&b&b\end{pmatrix}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $B=x\cdot A_{a,b}+yI_3$ să nu depindă de x. ***Prof.* Florentina Popescu**, Buzău

L:171. Se consideră un triunghi ABC. Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC pentru care $Aria(\Delta AMB)=Aria(\Delta BMC)=Aria(\Delta CMA)$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:172. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3=1$, arătați că:
$\det(x_1I_3-A)+\det(x_2I_3-A)+\det(x_3I_3-A)=3(1-\det A),\forall A\in M_3(C)$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

L:173. Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}x\cdot(3\ln(x+3)+5\ln(x+2)-8\ln(x+1))$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:174. Fie şirurile $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exprimate prin $a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)-k-1}$, $k\in\mathbb{N}$ şi $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

a) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi strict crescător.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

***Prof.* Iuliana Traşcă**, Scorniceşti, Olt

L:175. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:[0;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2, & x\in[0;1) \\ 2x^2-5x+c, & x\in[1;3] \end{cases}$ să verifice teorema lui Rolle.

***Prof.* Laura Tănase**, Buzău

L: 176. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x,y,z,t\in\mathbb{R}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $A^3-3A^2+2I_2$;

b) Calculați A^{2010};

c) Aflați matricele X pentru care AX=XA;

***Prof.* Gheorghe Dârstaru**, Berca

Clasa a XII – a

L:177. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care numărul $N=10^n-2^n-8$ este divizibil cu 21.

***Prof.* Ovidiu Țâțan**, Râmnicu Sărat

L:178. Să se calculeze: $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+\sin^2 x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

***Prof.* Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

L:179. Să se arate că $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{(a+b)^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)b}$, $\forall a,b\in C^*$.

***Prof.* Mihály Bencze**, Braşov

L:180. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{e^{2x}+5x+3}{e^{2x}+x}dx$

***Prof.* Laura Tănase**, Buzău

Vizitați www.mateinfo.ro

MATEmatică şi INFOrmații din învățământul ROmânesc

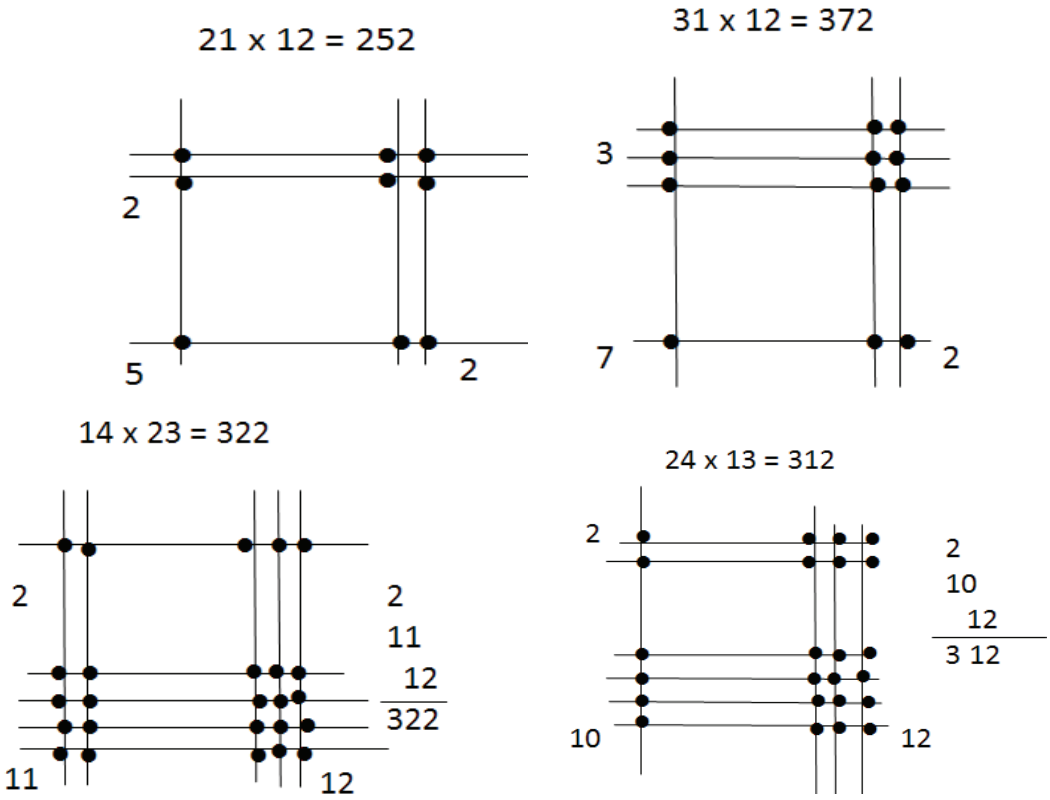
Reviste, sinteze teorie, probleme rezolvate, concursuri şi olimpiade, programe şcolare, proiecte didactice, metodologii şi documente şcolare, cărți de matematică, teste, fişe de lucru, jocuri de logică, softuri educaționale, modele subiecte BAC.

„ Când ai zece paşi de făcut, nouă paşi sunt jumătatea drumului''.

proverb chinezesc

6. Caleidoscop matematic

1. Cum înmulțeau vechii chinezi !



Liniile orizontale de sus reprezintă cifra zecilor iar cele de jos, cifra unităților ale primului număr. Liniile verticale din stânga reprezintă cifra zecilor iar cele din dreapta, cifra unităților ale celui de-al doilea număr. Rezultatul înmulțirii este exprimat în funcție de punctele de intersecție ale dreptelor.

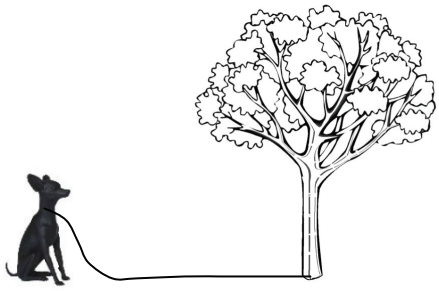
2. Puneți în spațiile libere dintre numere, operații sau alte simboluri astfel încât să dea rezultatul din dreapta.

1 1 1 = 6
2 2 2 = 6
3 3 3 = 6
4 4 4 = 6
5 5 5 = 6
6 6 6 = 6
7 7 7 = 6
8 8 8 = 6
9 9 9 = 6

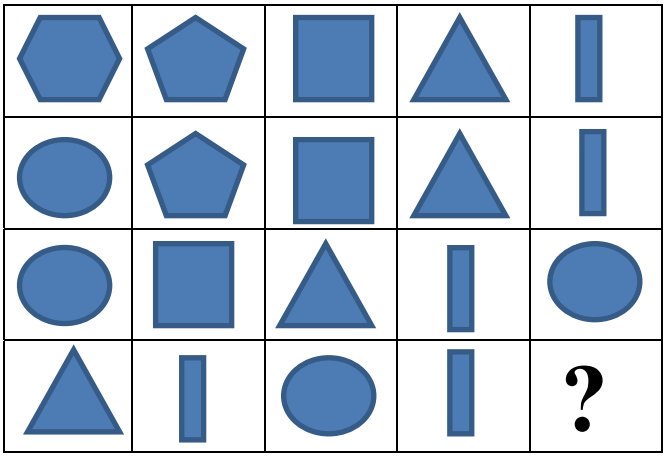
3. CURIOZITATI

$9 = 0 \cdot 9 + (0+9)$
$19 = 1 \cdot 9 + (1+9)$
$29 = 2 \cdot 9 + (2+9)$
$39 = 3 \cdot 9 + (3+9)$
$49 = 4 \cdot 9 + (4+9)$
$59 = 5 \cdot 9 + (5+9)$
$69 = 6 \cdot 9 + (6+9)$
$79 = 7 \cdot 9 + (7+9)$
$89 = 8 \cdot 9 + (8+9)$
$99 = 9 \cdot 9 + (9+9)$
$109 = 10 \cdot 9 + (10+9)$
$119 = 11 \cdot 9 + (11+9)$
$129 = 12 \cdot 9 + (12+9)$
.....

4. Un cățel este legat de un copac cu un lanț lung de 8 m iar la 15 m de el este aşezat un castron cu mâncare la care cățelul reuşeşte să ajungă. Cum este posibil acest lucru ?



5. Găseşte ordinea logică din fiecare dintre cele patru rânduri şi adaugă figura lipsă în cel de-al cincilea rând.



6. Ghicirea unui număr

Mihai îi spune lui Vlad: - Scrie pe hârtie un număr oarecare, format din patru cifre cuprinse între 0 şi 9 în ordine consecutivă. Scrie acelaşi număr în ordine inversă şi scade cel mai mic din cel mai mare. Nu - i aşa că ți-a dat 3087 ? Cum a aflat Mihai cât face diferența celor două numere fără să le cunoască ?

7. O demonstrație matematică a eşecului prin studiu, STUDIU = EŞEC ?

FĂRĂ STUDIU = EŞEC
STUDIU = FĂRĂ EŞEC
(+)FARA STUDIU + STUDIU = ESEC + FARA ESEC
(FARA + 1)STUDIU = (1 + FARA) EŞEC

De unde rezultă că STUDIU = EŞEC.



„ Oboseala şi lenea au aceleaşi simptome'' .

Bissane de Soleil

7. Poşta redacţiei

*D*ragi cititori, elevi şi profesori, a apărut al şaptelea număr al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**", o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

*P*rofesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic", sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

*E*levii care doresc să trimită rezolvările problemelor, trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare către profesorul clasei. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar în funcţie de posibilităţi, elevii cu cele mai mari punctaje ale profesorilor care colaborează cu revista vor fi premiaţi cu diplome şi cărţi.

*F*acem pe această cale o invitaţie către toţi profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, iar cei cărora li se publică articole să comande un număr mai mare de exemplare.

*D*ata finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru numărul **8** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII"** va fi **1 Octombrie 2011**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Redacţia

Răspunsuri la problemele de la **Caleidoscop Matematic**:

2. (1+1+1)! = 6 (3 factorial =1·2·3= 6); 2+2+2=6; 3·3-3=6

$\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=2+2+2=6$; 5:5+1 = 6; 6 + 6 – 6 = 6;

-7:7 + 7 = 6; $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}=2+2+2=6$; $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9}=9-3=6$.

4. Cățelul este pe partea cealaltă a copacului.

5. Asociind fiecărei figurI un număr se obţine următoarea secvenţă de numere: 654321, 54321, 4321, 321, 21, prin urmare ultima figură lipsă este cercul.

6. Diferenţa celor două numere este de forma $\overline{(x+3)(x+2)(x+2)x}-\overline{x(x+1)(x+2)(x+3)}=$

$(x+3)10^3+(x+2)10^2+(x+1)10+x-x10^3-(x+1)10^2-(x+2)10-(x+3)=3100-13=3087$.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII "Vasile Cristoforeanu" Rm. Sărat:
Clasa a VII-a : 40p-Buterez David, Sîrbu Claudiu, 35p- Chiriac Andrei,Doni Alina, 27p- Pârlog Valentin, Baciu Diana Valentina, Tudorache Alina, Neagu Daniela, Lazăr Elena ,Vlad Oana Andreea, Taşcă Valentin, 20p- Banu Calinuţ ; **Clasa a VIII-a :** 28p-Sitaru Bogdan, Andronescu Alexandra, 25p- Tatu Horaţiu Ştefan, Ursică Bogdan, Chiriac Corina, Barbu Ionelia; **Prof. Marin Simion;**

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni.
Clasa a V-a: 12p. Chiriacescu Roxana, 10p. Nica Camelia, Tescan Irina;
Clasa aVI-a: 28p. Bulgarea Alexandra; 22p. Neacsu Laura. **Clasa a VII- a**. 32p.Scarlat Roxana,;24p.Vasile Cristina, Marin Valentina; **Clasa a VIII-a**: 30p. Dragomir Alexandru; 25p.Cristea Maria, 23p.Birzoi Madalina. **Prof. Stanescu Ion.**

Şcoala cu clasele I-VIII, nr.1 Nehoiu:
Clasa a VII-a: 25p- Irimia Mălina, **Prof. Prefac Vasile.** 27p-Petre Andreea, **Prof. Prefac Maritanţa.**

Liceul de Artă „ Margareta Sterian", Buzău:
Clasa a VI-a: 20 p- Constantin Alexandra, Ţuclea Laura, Argăseală Gabriela, Velea Roxana, Stanciu Georgian, **Clasa a VII-a**: 25p-Cristea Irina, Stanciu Adelina; **Clasa a X-a**: 22 p- Dumitrache Emanuel, Mititelu Aurora, Enescu George, Vasile Smaranda, **Clasa a XI-a**: 20p- Ciomag Alina, Costache Raluca, **Prof. Dibu Daniela**.

Colegiul Economic Buzău:
Clasa a X-a: 27 p- Marin Adina, Mândruţă Alina; **Prof. Dinu Constantin**.

Grupul Şcolar „Costin Nenițescu", Buzău:
Clasa a IX-a: 14p**.** Feraru Andreea, Perţea Larisa, Dinu Mădălina, Mărunţiş Simona, Cătălin Alexandra, Pinţoiu Alina, Tudose Ştefania, Iordache Răzvan, Căpăţână Corina, Pascu Nicoleta, Baraboi Costin;
Clasa a X-a: 30p- Zaharia Mădălina, Bisoceanu Aura, Soare Manuela, Lixeanu Daniela, **Prof. Stan Adrian**. Borcău Georgiana, **Prof. Pleşu Natalia**, Olteanu Robert, Frăţiloiu Adrian, Bucur Liviu, Feraru Viorel, **Prof. Popescu Florentina**.
Clasa a XI-a: 32p- Vlad Iulian, , Dinu Alin, Antemir George, Dima Octavian, Anghel Sorin **Prof. Stan Adrian**. 23p- Iordache Mariana, Ispas Alina, Semian Ionela, Iordache Ioana, Anghel Cristina, **Prof. Pleşu Natalia**;

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a V-a: 15 p. Pîrvu Cristina, Ştefan Adriana, Radu Giorgiana, Marinescu Cătălin; **Clasa a VI-a**: 20p. Vâlcică Adelina, Traşcă Cătălina, Duţă Livia, Ghiţă Alin; **Clasa a VII-a**: 24 p. Marinescu Dorina, Vladu Laurenţiu. **Clasa a VIII-a**: 30p. Bălăşescu Nicoleta, Rişcă Ionuţ, Olteanu Marian. **Prof. Iuliana Traşcă.**

Scoala cu clasele I – VIII "Ion Creangă" Bacău:
Clasa a VI-a : 12p **-** Popescu Cezara, Chiper Raluca, Herciu Mădălina, Mocanu Alexandru; **Clasa a VIII-a: 14p -** Moruz Alexandru, Militaru Elena, Popa Dragoş **Prof. Constantin Eugen Păduraru.**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina.
Clasa a III-a: 20p. Năstase Teodora; **Clasa a V-a**: 18p. Bocioacă Andreea, 16p. Dumitru Georgiana; **Clasa a VI-a**: 26p.Năstase Daniel; 18p. Fleoarcă Andreea Raluca, Paraschivescu Andreea, 16p. Ciocan Mirela Vasilica **Clasa a VII-a**: 16p. Mihăilă Fănel Daniel; **Clasa a VIII-a**: 25p. Drăgoi Alexandru Ştefan. **Prof. Lăcrimioara Năstase.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 4, Moineşti, Bacău. .
Clasa a V-a: 6p. Munteanu Gheorghe, Lila Ionuţ, Olaru George, Ulia Maria, David Alexandra
Clasa a VII-a: 18p. Armeanu Ana , Martin Adrian; **Clasa a VIII-a** : 24p. Agavriloaie Bianca, Macadan Ioana, Dudău Codruţa, Botezatu Georgiana, Ciubotaru Alexandru, Cuceac Vicentiu, Gheorghe Bianca, Moldoveanu Alexandru, Motei Răzvan. **Prof. Cornelia Gurău.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Rm Sărat.
Clasa a VI-a: 10p. Iaru Ioana Victoria, Vasile Dragoş Mitruţ, Răpeanu Miruna. **prof. Valerica Roşu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba.
Clasa a V-a: 10p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeţ Dragoş, Sideriaş Alexandru; **Clasa a VII-a**: 12p.Bortoc Adrian, Codeanu Andrei, Dan Andreea, Vinersar Cătălin; **Clasa a VIII-a**: 10p. Mărgineanu Cristina**. prof. Mariana Mitea.**

Grup Şcolar Tehnic „ Sf. Mucenic Sava", Berca, Buzău.
Clasa a III-a: 9p. Badea Teodora, Bratosin Cosmina, Ciupag Alin, Dinu Alexandru, Ioniţă Lorena, Moldoveanu Andreea, Păpătoiu Andrei, Popa Mădălina, Şolcă Roxana, Tătulescu Răzvan, **Prof. Lupşan Nicoleta**.

Scoala cu clasele I-VIII, Bădila, Buzău.
Clasa a IV-a: 10 p. Buche Larisa, Porceanu Andreea, Sandu Ionuţ, **Prof. Brânză Cristian Cosmin**.

GRUPUL SCOLAR "COSTIN NENITESCU", BUZAU













ISSN 1716-3615