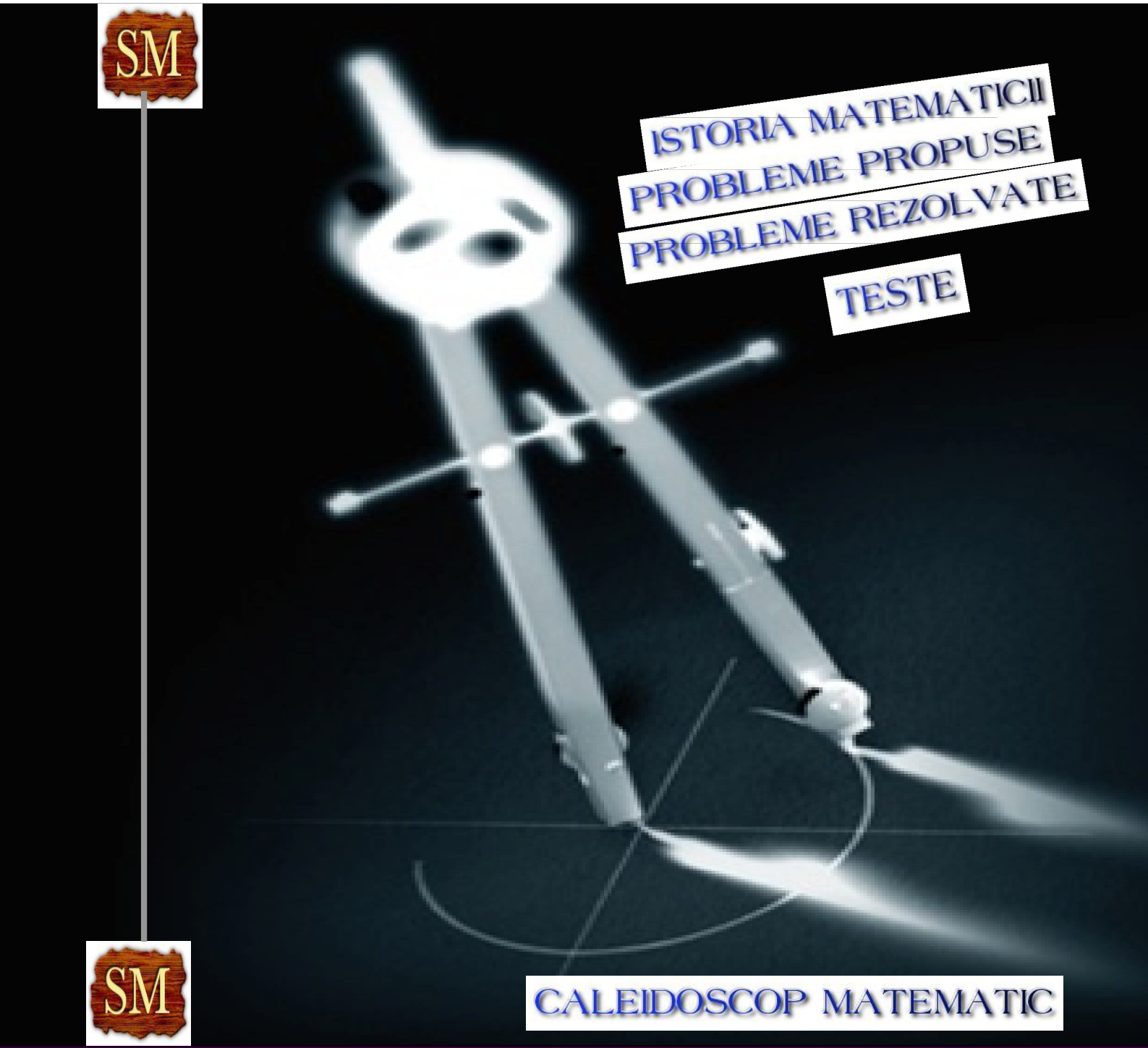
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN II, NR III, 2009 * 7 LEI *



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Rm. Sărat,

ISSN 1716-3615

SCLIPIREA MINTII

Revistă de cultură matematică, publicaţie semestrială, An II, Nr. III, APRILIE 2009, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- Preşedinte de onoare:
  Constantin Apostol

Constantin Rusu - Preşedinte Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Rm. Sărat;
Lenuţa Pârlog – Preşedinte Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău;

- Director:
  Neculai Stanciu

- Redactor şef:
  Adrian Stan

- Redactori principali:
  Costică Ambrinoc **Tuţă Luca**
  Constantin Dinu **Ana Panaitescu**
  Gabriela Lupşan

Membri colaboratori:
Rodica **Lupşan,** Gheorghe **Manea,** Gheorghe **Struţu**, Roxana **Stanciu**, Ion **Stănescu,** Simion **Marin**,Gherghina **Manea**, Marcela **Marin**, Ligia **Struţu**, Ştefana **Ispas,** Maria **Anton**, Felicia **Avrigeanu**, Daniela **Ion**, Ion **Lupşan**, Rodica **Ene**, Constantin **Lupşan,** Marius **Ursache,** Gheorghe **Dârstaru,** Ion **Radu,** Mariana **Apostol,** Elena **Cucu,** Viorel **Ignătescu,** Manuela **Apostol,** Gabriel **Andrei,** Doina **Vizitiu,** Ovidiu **Ţâţan,** Vasile **Prefac,** Maritanţa **Prefac,** Marioara **Vrabie** Florica **Marchidanu,** Mirela **Axente.**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII.....1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE.....2

EXAMENE ŞI CONCURSURI.....9

PROBLEME REZOLVATE.....10

PROBLEME PROPUSE 24

CALEIDOSCOP MATEMATIC.....31

POŞTA REDACŢIEI..... 32

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACTIA
Şcoala cu clasele I-VIII, **POTOCENI**, Com. MĂRĂCINENI, Jud. BUZĂU,
Str. Centrală, nr. 107, Cod: 127327; Tel. 0238556431;
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com **sau** **sclipireamintii@yahoo.com**

www.sclipireamintii.info



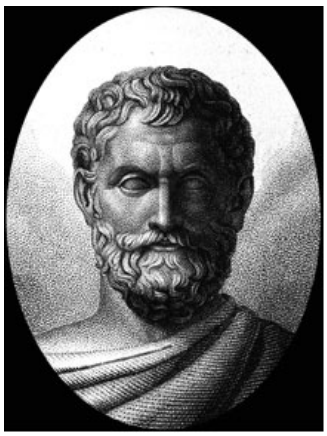
Câştigă-ţi frumuseţea nu la înfăţişare,
ci la felul de viaţă".

Thales

1. Istoria matematicii

Thales

de prof. Adrian Stan, prof. Steliana Bălescu



Thales din Milet (624 - 546 î.e.n.) considerat părintele ştiinţelor, a fost un filozof grec de origine feniciană care a adus contribuţii importante şi la dezvoltarea matematicii şi astronomiei. Considerat primul dintre Cei Şapte Înţelepţi ai Antichităţii, **Thales** este întemeietorul celei mai vechi şcoli filozofice din Milet, şcoala ioniană care a dezvoltat ideea de materialism în filozofie, reprezentând primii paşi în constituirea unei culturi ştiinţifice.

El a călătorit mult în Asia şi Egipt, a străbătut Chaldeea, făcând studii şi observaţii asupra fixării solstiţiilor şi revărsării Nilului, magnetismului, culturilor agricole; a studiat eclipsele de lună şi de soare şi a prezis cel dintâi prima eclipsă de soare din anul 585 î.e.n.

Thales a exclus Divinitatea ca izvor şi esenţă a lucrurilor din Univers, înlocuind-o cu o materie primordială şi esenţială, apa. Pământul era conceput ca o navă ce plutea pe un ocean. Cel mai interesant lucru observat de istoricii vremii la Thales a fost modul în care acesta observa lumea şi reflecta asupra existenţei umane sau a constituirii Universului, depăşind astfel condiţia omului de ştiinţă. Thales afirma că: **„ Dacă natura este una, atunci şi cauza sau principiul lumii este unul. Şi dacă părţile se nasc şi mor, întregul este însă indestructibil". „ Cel mai înţelept e Timpul, căci el descoperă toate; cel mai iute este Spiritul, căci el aleargă pretutindeni; cea mai tare e Necesitatea, căci ea domneşte peste toate; Fericit e acela care are trup sănătos, spirit iscusit şi fire educată".**(apud 1).

Thales şi discipolii săi au promovat curentul materialist, dezvoltând ştiinţele prin studiul amănunţit asupra naturii. Deşi biblioteca din Alexandria a fost distrusă de mai multe ori în urma deselor războaie, pierzînduse astfel şi o impresionantă colecţie de texte matematice, printre care şi cele ale lui Thales, totuşi ne rămân scrierile altor matematicieni şi istorici despre el ca Herodot, Proclus, Cicero, Seneca, Plinius cel Bătrân.

În matematică, **Thales** cunoştea că diametrul împarte cercul în două părţi congruente sau că unghiul înscris într-un semicerc este drept. De asemenea, ştia că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este cât măsura a două unghiuri drepte, precum şi congruenţa triunghiurilor precum şi teoria figurilor asemenea, teorie dezvoltată de el şi în care o teoremă îi poartă numele(teorema lui Thales). A măsurat înălţimea unei piramide prin lungimea umbrei ei şi distanţa dintre două puncte din care unul inaccesibil cu ajutorul proporţionalităţii laturilor în triunghiuri asemenea. Însuşi faraonul **Amasis** rămăsese uimit de felul cum **Thales** măsurase înălţimile piramidelor, ajutându-se doar de o vergea înfiptă în pământ şi de câteva măsurători simple.

Pe mormântul său este o inscripţie care spune: "**Aici, într-un mormânt strâmt zace marele Thales; totuşi renumita sa înţelepciune a ajuns la ceruri.**"

Bibliografie:

[1]. Georges Popps, Arthur Blake. 1997. Dialogul civilizaţiilor. Bucureşti. Editura Sennaş.
[2]. Vasile Bobancu. 2001. Caleidoscop matematic. Bucureşti. Editura Niculescu.

Profesori, Şcoala cu clasele I-VIII, Potoceni

O inegalitate în tetraedru

de prof. Constantin Rusu

Abstract. The purpose of the article is to describe the contributions to getting interesting results from inequality Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. We are considering both the originality and power of this methods, and the importance of his results.
Key words: inequality, tetrahedron
M.S.C.: 26 Dxx, 26D05

Scopul principal al acestei lucrări este de a stabili cu ajutorul inegalităţii Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz o inegalitate în tetraedru. Din această inegalitate vom obţine prin particularizări, inegalităţi interesante.

Propoziţie. Fie tetraedrul ABCD. Notăm cu S_A, S_B, S_C, S_D ariile feţelor laterale ce se opun varfurilor A, B, C şi D, cu V volumul tetraedrului şi cu d_A, d_B, d_C, d_D distanţele de la un punct M ce aparţine interiorului tetraedrului la feţele BCD, ACD, ABD, ABC.

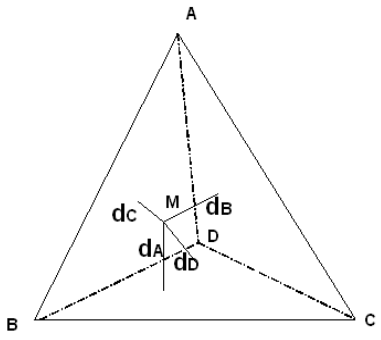
Să se demonstreze inegalitatea:

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 + d_D^2 \geq \frac{9V^2}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2}. \ (*)$$

Demonstraţie. Cu ajutorul inegalităţii Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz avem:

$$\left(d_A S_A + d_B S_B + d_C S_C + d_D S_D\right)^2 \leq (d_A^2 + d_B^2 + d_c^2 + d_d^2)\left(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2\right),$$

dar $d_A S_A + d_B S_B + d_C S_C + d_D S_D = 3V$ şi înlocuind în inegalitatea de mai sus se obţine cerinţa din propoziţie.



Egalitatea survine dacă : $\frac{d_A}{S_A} = \frac{d_B}{S_B} = \frac{d_c}{S_C} = \frac{d_D}{S_D}$.

I_1) Pentru M = I (centrul sferei înscrise în tetraedru), inegalitatea (*) devine:

$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 \geq \frac{9V^2}{4r^2}$ (r – raza sferei înscrise în tetraedru).

Egalitatea are loc dacă $\frac{d_A}{S_A} = \frac{d_B}{S_B} = \frac{d_c}{S_C} = \frac{d_D}{S_D}$ şi cum $d_A = d_B = d_C = d_D = r$ rezultă că $S_A = S_B = S_C = S_D$, adică tetraedrul este echifacial.

I_2) Pentru M = G (G – centrul de greutate al tetraedrului) avem:

$$\frac{S_B^2 + S_C^2 + S_D^2}{S_A^2} + \frac{S_A^2 + S_C^2 + S_D^2}{S_B^2} + \frac{S_A^2 + S_B^2 + S_D^2}{S_C^2} + \frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}{S_D^2} \geq 12.$$

Demonstraţie. Din proprietatea centrului de greutate al unui tetraedru şi din formula care ne dă volumul avem:

$$d_A = \frac{3V}{4S_A}\ ,\ d_B = \frac{3V}{4S_B}\ ,\ d_C = \frac{3V}{4S_C}\ ,\ d_D = \frac{3V}{4S_D}\ .$$

Inlocuind în inegalitatea din propoziţie obţinem:

$$\frac{9V^2}{16}\left(\frac{1}{S_A^2}+\frac{1}{S_B^2}+\frac{1}{S_C^2}+\frac{1}{S_D^2}\right)\geq\frac{9V^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2}\Leftrightarrow$$

$$4+\frac{S_B^2+S_C^2+S_D^2}{S_A^2}+\frac{S_A^2+S_C^2+S_D^2}{S_B^2}+\frac{S_A^2+S_B^2+S_D^2}{S_C^2}+\frac{S_A^2+S_B^2+S_C^2}{S_D^2}\geq 16,$$

adică inegalitatea cerută.

Egalitatea se obţine în tetraedrul echifacial.

Demonstraţie. Proiectăm pe planul triunghiului BCD mediana AG_A (G_A este centrul de greutate al triunghiului BCD). Proiecţia punctului A este punctul A', iar punctual G se proiectează în punctul G'. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AA'G_A$ şi $GG'G_A$ avem: $\frac{GG'}{AA'}=\frac{G_AG}{G_AA}\Leftrightarrow\frac{d_A}{AA'}=\frac{1}{4}$. Dar $AA' = 3V/S_{BCD}$ şi $d_A = 3V/4S_{BCD}$. Analog se obţin exprimările pentru d_B, d_C şi d_D. Inlocuind în cazul de egalitate al inegalităţii din propoziţie se obţine:

$$\frac{3V}{4S_{BCD}^2}=\frac{3V}{4S_{ACD}^2}=\frac{3V}{4S_{ABD}^2}=\frac{3V}{4S_{ABC}^2}\Rightarrow S_{BCD}=S_{ACD}=S_{ABD}=S_{ABC}\ ,$$

adică tetraedrul este echifacial.

I_3) Pentru M = O (O – centrul sferei circumscrise) avem:

$$4R^2-(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2)\geq\frac{9V^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2}\ ,$$

unde R este raza sferei circumscrise tetraedrului, R_A este raza cercului circumscris feţei BCD şi analoagele.

Egalitatea are loc dacă:

$$\frac{R^2-R_A^2}{4S_A^2}=\frac{R^2-R_B^2}{4S_B^2}=\frac{R^2-R_C^2}{4S_C^2}=\frac{R^2-R_D^2}{4S_D^2}\ .$$

Inegalitatea I_3 se obţine imediat din inegalitatea din propoziţie în care $d_A^2=R^2-R_A^2$ şi analoagele.

Bibliografie:
[1]. Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Rm. Sărat. Articole şi note matematice. Editura Rafet. Rm. Sărat. 2006.

Prof., Liceul Teoretic „Ştefan cel Mare''
Râmnicu Sărat

„Matematica este ca o moară. Dacă pui boabe de grâu va da făină, dar dacă pui tărâţe, tărâţe va da".

A. Huxley

Ecuaţii cu soluţie unică

Prof. Ispas Ştefana - Mirela

Acest articol îşi propune o prezentare a unor tipuri de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice care se rezolvă cu ajutorul monotoniei funcţiilor şi care admit soluţie unică.
Rezolvarea ecuaţiilor cu soluţie unică constă:
a) în a le aduce la forma $f(x)=g(x)$, unde **f** şi **g** sunt funcţii strict monotone, de monotonii diferite şi observând că ecuaţia are o soluţie unică x_0;
b) în a le aduce la forma $f(x)=c$, unde **f** este o funcţie strict monotonă, iar **c** este o constantă şi observând că ecuaţia are o soluţie unică x_0.

Exemple: **1**) **Să se rezolve ecuaţia**:

$$\log_{2006}(x-1)+\log_{2007}(x^2-1)+\log_{2008}(x^3-1)=2-\lg_{10}(\frac{x^9-12}{5}).$$

Soluţie: Domeniul de definiţie al ecuaţiei este: $D=(\sqrt[9]{12},+\infty)$. Notând cu:

$f(x)=\log_{2006}(x-1)+\log_{2007}(x^2-1)+\log_{2008}(x^3-1)$ şi cu $g(x)=2-\lg_{10}(\frac{x^9-12}{5})$ ecuaţia de rezolvat poate fi pusă sub forma: $f(x)=g(x)$. Cum $f(x)$ este strict crescătoare şi $g(x)$ este strict descrescătoare pe D, ecuaţia $f(x)=g(x)$ are soluţie unică.
Se observă cu uşurinţă că x=2 este soluţie a ecuaţiei, întrucât avem f(2)=g(2)=0. Aşadar x=2 soluţie unică.

2) **Să se rezolve ecuaţia**:

$$\log_2(x+1)+\log_3(x+1)+...+\log_n(x+1)+n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+...\left(\frac{1}{n}\right)^x$$

Soluţie: Se observă că x=0 este soluţie:

$$\underbrace{\log_2(x+1)}_{0}+\underbrace{\log_3(x+1)}_{0}+...+\underbrace{\log_n(x+1)}_{0}+n-1=\underbrace{1+1+1+...+1}_{n-1\ de\ 1}\Rightarrow n-1=n-1(A)$$

Se consideră $f(x)=\log_2(x+1)+\log_3(x+1)+...+\log_n(x+1)+n-1$ şi

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+...\left(\frac{1}{n}\right)^x$. Se arată că $f(x)$ este strict crescătoare pe R şi $g(x)$ este strict descrescătoare pe R, deci x=0 este unica soluţie a ecuaţiei.

3) **Să se rezolve ecuaţia**: $\mathbf{4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x}$
Soluţie:
Observăm că x=0 verifică ecuaţia: 1+1+1=1+1+1→3=3 (A)
Prelucrăm ecuaţia astfel: $4^x+9^x-6^x=10^x+15^x-25^x$ după care împărţim cu 10^x;

$\left(\frac{4}{10}\right)^x+\left(\frac{9}{10}\right)^x-\left(\frac{6}{10}\right)^x=\left(\frac{10}{10}\right)^x+\left(\frac{15}{10}\right)^x-\left(\frac{25}{10}\right)^x$

Definim următoarele funcţii:

f(x)= $\left(\frac{4}{10}\right)^x+\left(\frac{9}{10}\right)^x-\left(\frac{6}{10}\right)^x$ este strict descrescătoare pe R

g(x)= $\left(\frac{10}{10}\right)^x+\left(\frac{15}{10}\right)^x-\left(\frac{25}{10}\right)^x$ este strict crescătoare pe R

Rezultă că soluţia unică este x=0

4) $(\cos\alpha)^x+(\sin\alpha)^x=1,$ cu $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Soluţie:

Observăm că x=2 este soluţie a ecuaţiei: $(\cos\alpha)^x+(\sin\alpha)^x=1$, întrucât $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Definim următoarele funcţii:

f(x)= $(\cos\alpha)^x$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$f(x) este strict descrescătoare pe R

g(x)=$(\sin\ \alpha)^x$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$g(x) este strict crescătoare pe R

f(x)+g(x)= $(\cos\alpha)^x+(\sin\alpha)^x$ este strict descrescătoare pe R

5) $3^{\sqrt{x-5}}=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

Soluţie: Observăm că x=5 este soluţie a ecuaţiei: $3^0=1\rightarrow 1=1$ (A)

Definim funcţiile:

f:R→R, f(x)=$3^{\sqrt{x-5}}$ este strict crescătoare pe R şi g:R→R, g(x)= $\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ este strict descrescătoare pe R;

Rezultă că soluţia unică este x=5.

Bibliografie:

[1]. Principii şi structuri fundamentale în matematica de liceu, Al. Leonte, Ed. Albatros, 1986

[2]. Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee, Florica Vornicescu, Ed. Ştiinţifică, 1992.

Prof.,Liceul cu program Sportiv "Iolanda Balaş Soter"

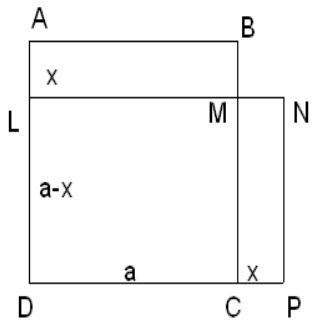
Câteva probleme de maxim

de prof. Viorel Ignătescu

Acest articol îşi propune să vină în faţa cititorilor cu câteva exemple de probleme de maxim utile pentru elevii de gimnaziu în aprofundarea noţiunii de maxim.

1. Dacă două numere pozitive au suma constantă, atunci produsul lor este maxim când ele sunt egale.

Demonstraţie*:* Problema revine la a arăta că dintre toate dreptunghiurile care au perimetre (semiperimetre) constante, aria cea mai mare o are pătratul.



Fie latura pătratului ABCD de lungime a, iar laturile dreptunghiului DPNL de lungimi
DL = $a - x$ şi DP = $a + x$, iar AL = CP = x.
$P_{ABCD} = 4AB = 4a \Rightarrow P_{ABCD} = 2AB = 2a$;
$P_{DPNL} = 2(DL+DP) = 2(a - x + a + x) = 4a \Rightarrow$
$P_{DPNL} = DL+DP=2a$;
$A_{ABCD} = A_{LMCD} + A_{ABML}$, iar $A_{DPNL} = A_{LMCD} + A_{MNPC}$

A compara A_{ABCD} cu A_{DPNL} revine la a compara A_{ABML} cu A_{MNPC}.

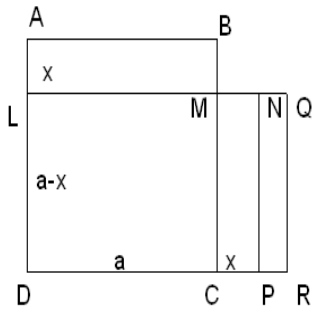
$$\left.\begin{aligned} A_{ABML} &= AB \cdot AL = a \cdot x \\ A_{MNPC} &= CM \cdot CP = (a \cdot x) \cdot x \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{ABML} > A_{MNPC},$$ deoarece a > a – x

Deci, $A_{ABCD} > A_{DPNL}$. Prin urmare, produsul este maxim dacă numerele sunt egale.

2. Dacă două numere pozitive au produsul constant, atunci suma lor este minimă când ele sunt egale.

Demonstraţie :

Folosind demonstraţia geometrică de mai sus, avem $A_{ABCD} > A_{DPNL}$ Pentru ca ariile să fie egale trebuie să mai adăugăm o suprafaţă. Fie această suprafaţă dreptunghiul NQRP.



Prin urmare $A_{ABCD} = A_{DRQL} \Rightarrow AB \cdot AD = DL \cdot DR$

Din demonstraţia geometrică de mai sus avem:

AB + AD = DL + DP < DL + (DP + PR) = DL + DR => AB+AD < DL+DR. Deci, dacă produsul a două numere pozitive este constant, atunci suma lor este minimă când numerele sunt egale.

3. Se consideră, în plan, punctele A(m, 0), B(1, 2) şi C(7, 4), cu $m \in [1;7]$. Să se găsească cea mai mare valoare a lui m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Rezolvare *:* Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, conform teoremei lui Pitagora,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(7-1)^2 + (4-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(1-m)^2 + (2-0)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(7-m)^2 + (4-0)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 6^2 + 2^2 = (1-m)^2 + 2^2 + (7-m)^2 + 4^2$$

de unde rezultă că ecuaţia $m^2 - 8m + 15 = 0$, are soluţiile 3 şi 5.

Cea mai mare valoare a lui m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A este 5.

4 . Dacă a - 2 = b + 4 = c - 4 = d + 6 = e-7, să se găsească cel mai mare dintre numerele a, b, c, d şi e.

Rezolvare *:*

Fie a – 2 = b + 4 = c - 4 = d + 6 = e – 7 = k. Din aceste relaţii rezultă: a=k+2, b=k-4, c=k+4, d=k-6, e=k+7, aşadar **e** este cel mai mare deoarece se obţine adăugând cel mai mult lui k.

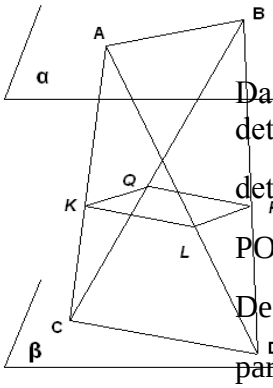
5. Fie planele paralele α şi β, segmentele neparalele [AB] şi [CD], [AB]$\subset$α, [CD] $\subset$β, şi punctele mobile M şi N, M Є [AB], N Є [CD]. Să se determine natura patrulaterului determinat de mijloacele segmentelor [MN], când M aparţine segmentului [AB] şi N aparţine segmentului [CD]. Ce condiţii trebuie să îndeplinească segmentele [AB] şi [CD] pentru ca produsul a două laturi consecutive ale acestui patrulater să fie maxim ? Dar ca aria patrulaterului să fie maximă ?

Rezolvare *:*

Deoarece M se mişcă pe [AB] şi N se mişcă pe [CD], avem o infinitate de segmente [MN].

Fie AB = a şi CD = b.

Dacă M = A şi N se mişcă pe [CD], segmentele [MN] determină planul triunghiului ACD, iar mijloacele lor determină linia mijlocie [KL] în ΔACD, $KL = \frac{CD}{2} = \frac{b}{2}$ şi KL || CD.



Dacă M=B şi N se mişcă pe [CD], segmentele [MN] determină planul triunghiului BCD, iar mijloacele lor determină linia mijlocie [PQ] în ΔBCD, $PQ = \frac{CD}{2} = \frac{b}{2}$ şi PO || CD

Deoarece $KL = PQ = \frac{a}{2}$ şi KL || PQ || CD => KLPQ este paralelogram

Analog, dacă N = C şi N = D iar M se mişcă pe [AB], avem [KQ] şi [LP] linii mijlocii (deoarece un segment are un unic mijloc) în triunghiurile CAB, respectiv $DAB \Rightarrow KQ = LP = \frac{a}{2}$. Paralelogramul KLPQ are perimetrul P_{KLPQ} = 2KL + 2KQ = a + b = constant. Pentru ca produsul KL • KQ să fie maxim, trebuie să avem KL = KQ, conform (problemei 1). Deci, KLPQ este romb => AB = CD (a = b). Pentru ca aria rombului KLPQ să fie maximă, trebuie ca KLPQ să fie pătrat (înălţimea rombului este mai mică decât latura sa) => $AB \perp CD$. Prin urmare, pentru ca produsul a două laturi consecutive să fie maxim trebuie ca segmentele să fie de lungimi egale, iar ca aria patrulaterului să fie maximă, trebuie ca segmentele să fie de lungimi egale şi perpendiculare.

Bibliografie:
[1]. Al. Blaga; A. Balauca; Al. Constantinescu; A Ghioca. Olimpiade de matematică 1990-1998. Editura Gill, Zalau
[2]. Gh. Galbura – Algebra. Editura Didactica si Pedagogica. Bucuresti.1972

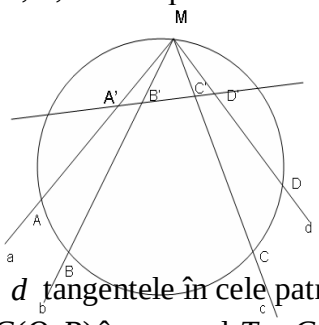
Prof., Şcoala cu clasele I-VIII Florica

Rezolvarea problemelor de concurenţă şi coliniaritate utilizând proprietăţile fasciculelor anarmonice (II)

de Prof. Neculai Stanciu

Teorema 3. Fie A,B,C,D puncte fixe pe $C(O;R)$ şi $M \in C(O;R)$ (fig.6).Dacă $MA=a, MB=b, MC=c, MD=d$ atunci , $\forall M \in C(O;R)$ $M(abcd)$ este invariant.

Demonstraţie. $M(abcd)=\dfrac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})}:\dfrac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$=constant, deoarece A,B,C,D sunt puncte fixe şi



$\hat{ca}=\dfrac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}$=ct., $\hat{cb}=\dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2R}$=ct., $\hat{da}=\dfrac{\overset{\frown}{DCBA}}{2R}$=ct., $\hat{db}=\dfrac{\overset{\frown}{DCB}}{2R}$=ct.

Observaţie. Din figura 6 rezultă $M(ABCD)=M(A'B'C'D')$.

Teorema 4. Fie $A,B,C,$ şi D puncte fixe pe $C(O;R)$ iar , $a,b,c,$ şi d tangentele în cele patru puncte la cercul $C(O;R)$ .Atunci oricarea ar fi tangenta t la cercul $C(O;R)$ în punctul $T \in C(O;R)$, punctele $A_1=a\cap t, B_1=b\cap t, C_1=c\cap t$ şi $D_1=d\cap t$ formează o diviziune anarmonică $(A_1B_1C_1D_1)$ invariantă.

Demonstraţie. Considerăm fig.7 Avem $(A_1B_1C_1D_1)=O(A_1B_1C_1D_1)$ .Formăm apoi fasciculul cu vârful în T şi raze $TA\perp OA_1$, $TB\perp OB_1$, $TC\perp OC_1$ şi $TD\perp OD_1$ .Deci $T(ABCD)=O(A_1B_1C_1D_1)$.

Obţinem $(A_1B_1C_1D_1)=T(ABCD)=(\sin\dfrac{\overset{\frown}{CBA}}{2R}:\sin\dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2R}):(\sin\dfrac{\overset{\frown}{DA}}{2R}:\sin\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})$ =constant.

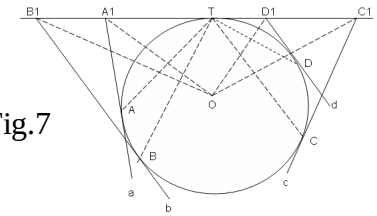
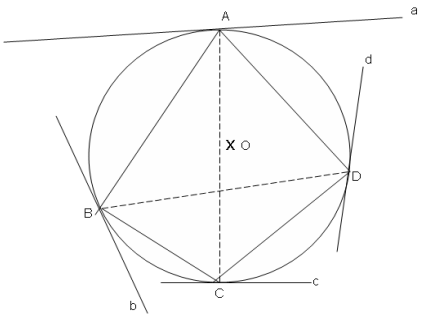


Fig.7

Fig. 8



Teorema 5. Pe cercul $C(O;R)$ considerăm punctele distincte A,B,C,D şi tangentele a,b,c,d în aceste puncte la cerc (figura 8).Avem egalităţile:

$A(aBCD)=B(AbCD)=C(ABcD)=D(ABCd)$

Demonstraţie. $A(aBCD)=(\sin\hat{CAa}:\sin\hat{CAB}):(\sin\hat{DAa}:\sin\hat{DAB})=$

$=(\sin\dfrac{\overset{\frown}{CDA}}{2R}:\sin\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2R}):(\sin\dfrac{\overset{\frown}{DA}}{2R}:\sin\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2R})=r=cons\tan t=B(AbCD)=C(ABcD)=D(ABCd)$

Bibliografie:

[1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
[2] Mihăileanu, N. N., Complemente de geometrie sintetică, E.D.P., Bucureşti, 1965.

Profesor, Grup Şcolar Tehnic, "Sf. Mc. Sava",
Berca, Buzău

„ Egalitatea nu există decât în matematică”
Mihai Eminescu

3. *Examene şi concursuri*

„SCLIPIREA MINŢII” – MUNCĂ ŞI TALENT

de prof. Adrian Stan, prof. Ana Panaitescu,
prof. Neculai Stanciu

*D*ragi elevi şi profesori, rândurile de mai jos sunt dedicate tuturor celor care înţeleg că pentru a avea succes în matematică, trebuie multă muncă şi talent pe deasupra, multă dăruire şi aplecare pentru această activitate, precum şi multă voinţă pentru a persevera şi a nu te da bătut. Mulţi elevi buni participă la concursuri dar puţini reuşesc să ocupe locurile fruntaşe şi totuşi rămâne speranţa că data viitoare vor fi şi ei printre primii. Noi, profesorii organizatori sau participanţi la Concursul Judeţean de Matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, ne facem o datorie de onoare de a antrena aceşti copii, de a le îndrepta studiul preponderent către matematica de performanţă pentru a deveni foarte buni în competiţie cu ceilalţi. Acest concurs care în fiecare an se desfăşoară în altă unitate şcolară din cadrul Parteneriatului Educaţional, „ Sclipirea Minţii”, mobilizează în fiecare an din ce în ce mai mulţi elevi din şcolile judeţului Buzău şi mai ales din cele din mediul rural, elevi care nu se limitează la aceste premii ci din contră, pe cei mai mulţi dintre ei îi găsim participanţi şi la alte concursuri judeţene sau interjudeţene sau la olimpiada de matematică unde sunt de asemenea pe locuri fruntaşe.

*P*e 22 Noiembrie a avut la Grup Şcolar Tehnic „ Sfântul Mucenic Sava”,Berca, ediţia a treia a concursului, unde au participat cu elevi, profesorii: **Prefac Vasile, Prefac Maritanţa**(Şcoala nr. 1 Nehoiu), **Dârstaru Gheorghe**(Scoala Valea Părului, Beceni), **Lupşan Rodica, Berca Vasile** (Şcoala Berca), **Marin Simion**(Scoala V. Cristoforeanu, Rm.Sărat), **Apostol Mariana**(Şcoala Nr.1, Rm.Sărat), **Ursică Vasilica**(Scoala nr. 6, Rm Sărat), **Struţu Gheorghe**(Liceul cu program sportiv „I. B. Soter”, Buzău), şi în calitate de organizatori principali, **Panaitescu Ana**(Şcoala Valeriu Sterian, Rm. Sărat), **Stanciu Neculai** (Şcoala Berca), **Stan Adrian** (Şcoala Potoceni).

*P*entru anul şcolar viitor, concursul va avea loc pe data de 14 Noiembrie în tabăra de la Poiana Pinului, unde vor fi aşteptaţi elevi de clasele V-VIII, din toate şcolile din judeţul Buzău.

*D*in cei 150 de elevi participanţi la concursul de la Berca vom da şi noi în continuare numele elevilor care au luat premii, menţionând că subiectele se găsesc pe adresa **www.sclipireamintii.info**

Clasa a V-a, **Loc. I**: **Buterez David**, **Ştirbu Claudiu**, **Chiriac Andrei**, *Şcoala V. Cristoforeanu*, **Loc.II. Sandu Mădălina**, **Nae Alina**, *Şcoala Valea Părului, Beceni*, **Irimia Alina**, *Şcoala nr.1 Nehoiu*, **Roşu Laurenţiu**, *Şcoala Potoceni*, **Balicu Marius**, *Liceul Sportiv Buzău*, **Dumitru Sânziana**, *Scoala Berca*, **Vlad Oana**, *Şcoala V. Cristoforeanu*, **Loc. III**: **Cîmpeanu Andreea**, *Şcoala Potoceni*, **Niţă Marian**, **Ungureanu Alexandru**, *Şcoala Valea Părului, Beceni*, **Oprea Andreea**, *Şcoala Berca*, **Petre Andreea**, *Şcoala nr.1 Nehoiu;*

Clasa a VI-a, **Loc. I**: **Şoigan Mihaela**, **Radu Alexandru**, **Gheorghe Valentin** (*Şcoala Berca*), **Ionescu Cătălin**, **Alecu Cristian**(*Şcoala Valeriu Sterian, Rm. Sărat*), **Icăţoiu Cosmin**, **Eniţă Ciprian**(*Scoala nr. 1 Rm. Sărat*), **Loc. II**: **Pleştiu Mihaela**, **Poeană Ronald**(*Şcoala nr.1 Rm.Sărat*), **State Valeriu**(*Şcoala Valeriu Sterian*), **Şeremet Alin**(*Şcoala Berca*), **Loc III**: **Căldăraru Andreea**, **Andronache Maria**(*Şcoala nr. 5, Rm.Sărat*), **Dinu Cristian**(*Şcoala Berca*), **Cîmpeanu Iulian**, **Soare Anelis**(*Şcoala Potoceni*), **Ion Adina**, **Stoian Ionela**, **Gheorghe Andreea**, **Dinică Mariana**, **Pâslaru Ionica**(*Şcoala Valeriu Sterian, Rm. Sărat*), **Ciciu Alina**(*Şcoala Valea Părului*);

Clasa a VII-a, **Loc. I**: **Aktug Nebahat**(*Şcoala Valeriu Sterian, Rm Sărat*), **Dragomir Florin**, **Neagu Ancuţa**, **Şerbănescu Valentin**, **Stoica Petruţ**(*Şcoala Berca*), **Loc. II**: **Petre Antonia**(*Şcoala nr. 1 Nehoiu*), **Coman Eleonora**(*Şcoala Berca*), **Ardeleanu Alexandru**(*Şcoala nr. 1 Rm. Sărat*), **Dogaru Iulian**, **Castravete Miruna**(Şcoala Berca), **Chirciu Andrei**(*Şcoala nr. 1 Rm. Sărat*), **Loc. III**: **Banu Bianca**(*Şcoala Berca*), **Vlase Lidia**(*Scoala nr. 1, Rm. Sărat*), **Cîmpeanu Cosmin**, **Dodan Bogdan**, **Anton George**(*Şcoala Berca*).

*V*ă urăm succes în continuare şi cât mai multe rezultate bune la şcoală.

„ La început a fost numărul;
el este stăpânul Universului”
Pitagora

4. ***Probleme rezolvate***

Clasa a III-a

P:56. Radu a cumpărat câteva cărţi de aventuri cu 95 lei bucata şi tot atâtea cărţi de poveşti cu 73 lei bucata. Pentru cărţile de aventuri a plătit cu 374 lei mai mult. Câţi lei a plătit pentru toate cărţile?

Înv. Elena Cucu, Valea Părului, Beceni

Rezolvare :

Cu cât a plătit mai mult pentru cartea de aventuri? 95 – 73= 22 (lei)
Câte cărţi de fiecare fel a cumpărat Radu? 374 : 22 = 17 (cărţi)
Cât costă cărţile de aventuri? 17 x 95 = 1615 (lei)
Cât costă cărţile de poveşti? 17 x 73 = 1241 (lei)
Cât costă cărţile cumpărate de Radu? 1615 + 1241 = 2856 (lei)
Răspuns : 2856 lei

P:57.Din răsturnatul unui număr de două cifre am scăzut sfertul acelui număr şi am obţinut 12.
Care este numărul?

Înv. Vrabie Marioara, Berca

Rezolvare:

Numărul căutat este de forma $\overline{ab}$.

Răsturnatul său este de forma $\overline{ba}$.

Reprezentăm printr-un segment răsturnatul numărului $\overline{ab}$ ____

$\overline{ba}$ ____ ____ ____ _ _ _

12: 3 = 4 (sfertul numărului $\overline{ba}$)

4 x 4 = 16 (răsturnatul numărului $\overline{ab}$)

$\overline{ab}$ este 61.

Clasa a IV-a

P:58. Într-o excursie în pădure bunicul spune o problemă nepoţilor săi:
Când bradul avea 52 de ani, stejarul avea 39, teiul 14 ani, iar mesteacănul 46 de ani. Acum împreună au 211 ani.
Ce vârstă are fiecare?

Inst. Maria Anton, Berca

Rezolvare:

52+39+14+46=151 (ani)
211 - 151 = 60 (ani)
60 : 4 = 15 (ani)
b = 52 + 15 = 67 (ani)
s = 39 + 15 = 54 (ani)
t = 14 + 15 = 29 (ani)
m = 46 + 15 = 61 (ani)

P:59. Micşoraţi de 10 ori diferenţa dintre triplul câtului numerelor 80 şi 8 şi dublul sumei numerelor 1 şi 9.

Inst. Anton Maria, Berca

Rezolvare:

[(80:8) x 3 - (9+1)x2] : 10 = 1

P:60. Suma a trei numere este 897. Aflaţi numerele ştiind că primul număr este egal cu cel mai mic număr par de trei cifre scris cu cifre distincte, iar cel de-al doilea este de 5 ori mai mare decât a treia parte din suma dintre primul număr şi răsturnatul său.

Înv. Ion Daniela, Berca

Rezolvare:

1.Scriem primul număr: 102
2.Aflăm suma dintre primul număr şi răsturnatul său.: 102+201=303
3.Aflăm a treia parte din suma aflată: 303: 3 = 101
4.Aflăm cel de-al doilea număr: 101x 5 =505
5.Aflăm suma primelor două numere: 102 + 505 =607
6.Aflăm al treilea număr: 897 – 607 =290
Proba: 102 + 505 + 290 =897

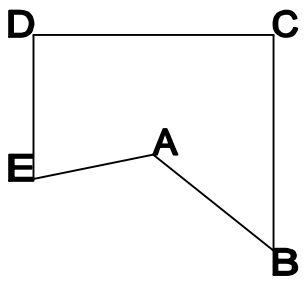
P:61. Aflaţi numerele de patru cifre, ştiind că:
1) Adunând cifrele din 1 în 1, obţinem 20;
2) Adunând cifrele din 2 în 2, obţinem 10;
3) Adunând cifrele din 3 în 3, obţinem 4;
4) Adunând cifrele din 4 în 4, obţinem 2.

Rezolvare:

Notăm numărul căutat cu $\overline{abcd}$. Datele problemei conduc la relaţiile:
a+b+c+d =20; a+c=10; a+d=4; a=2. Obţinem 2882.

Prof. Ion Stănescu, Smeeni

P:62. Traseul expediţiei şcolare din Smeeni, ediţia 39, din 09.08.2008, are următoarea formă:



Fiecare membru al echipajului a consumat 1/8 litri de apă de băut pe porţiunea AB. Pe BC, de 6 ori mai mult. Pe CD de 4 ori mai mult. Pe DE, de două ori mai puţin decât pe BC. Pe EA, de două ori mai puţin decât pe CD. Câţi de litri de apă a consumat fiecare expediţionar.

Prof. Ion Stănescu, Smeeni

Rezolvare: $C = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{16}{8} = 2(litri)$

P:63. Să se găsească numărul necunoscut **x** din egalitatea: (8264-x)-(2642+1695)=2982.

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

Rezolvare:

(8264-x) - 4337=2982
8264-x=4337+2982
8264-x=7319
x=8264-7319
x=945

- ***GIMNAZIU - Probleme rezolvate din revista nr.2 / 2008 -***

Clasa a V – a

G:32. Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale cu proprietatea că, împărţindu-l pe primul la al doilea, obţinem un cât şi un rest, iar împărţindu-l pe al doilea la primul, obţinem câtul egal cu primul rest şi restul egal cu primul cât.

***Prof.* Constantin Apostol**

Rezolvare: Fie (x,y) o pereche de numere naturale nenule şi distincte cu proprietatea din enunţ. În plus, fie $x\langle y$. Dacă-l împărţim pe x la y, obţinem câtul 0 şi restul x, adică $x = y\cdot 0 + x$; Dacă-l împărţim pe y la x, trebuie să obţinem câtul x şi restul 0, adică $y = x\cdot x + 0$. Rezultă că pereche (x;y) este $(x;x^2)$, cu $x \geq 2$. Aşadar există o infinitate de perechi $(x;x^2)$, cu proprietatea din problemă.

G:33. Determinaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că are loc relaţia: $\dfrac{\overline{abc}}{(b+c)^2} = a^2$.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $\overline{abc} = [a(b+c)]^2 \Rightarrow 324 = [3(2+4)]^2 \Rightarrow \overline{abc} = 324$.

G:34. Determinaţi numerele naturale nenule a,b,c,d,e astfel încât $5^{61} = a^2 + b^3 + c^4 + d^5 + e^6$.

***Prof.* Luca Tuţă**

Rezolvare:

Numărul 5^{61} se poate scrie astfel:

$5^{61} = 5^{60} + 5^{60} + 5^{60} + 5^{60} + 5^{60} = (5^{30})^2 + (5^{20})^3 + (5^{15})^4 + (5^{12})^5 + (5^{10})^6$. Aşadar numerele căutate sunt: $a=5^{30}$, $b=5^{20}$, $c=5^{15}$, $d=5^{12}$, $e=5^{10}$.

G:35. Suma a două numere naturale este 162, iar suma răsturnatelor este 513. Determinaţi cele două numere.

***Prof.* Ştefana - Mirela Ispas**

Rezolvare: Deoarece suma celor doua numere are cifra sutelor egala cu 1, iar suma rasturnatelor lor are cifra sutelor egală cu 5, rezultă că unul dintre numere are trei cifre, iar celalalt are două cifre, aşadar avem relaţiile: $\overline{abc} + \overline{xy} = 162$ (1) si $\overline{cba} + \overline{yx} = 513$ (2)

Din (1) $\Rightarrow$ a=1, iar din (2) $\Rightarrow$ x=2, de unde, tinandu-se seama de (1), rezulta ca b=3 sau b=4.

Daca b=3, atunci (2) devine $\overline{c31} + \overline{y2} = 513, \Rightarrow$ y=8 si c=4.

Daca b=4, atunci (2) devine $\overline{c31} + \overline{y2} = 513, \Rightarrow$ y=7 si c=4.

Întrucât, în acest caz, c+y=11, ceea ce este în contradicţie cu (1), rezultă că nu putem avea b=4.

Aşadar, numerele căutate sunt $134\ si\ 28$.

G:37. Găsiţi toate numerele naturale pătrate perfecte mai mici decât 2008, care la împărţirea cu 48 dau restul 16.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $n^2 = 48\cdot c + 16,\ n^2\langle 2008 \Rightarrow 8(6c+2)\langle 2008 \Rightarrow 6c+2\langle 251,\ c \in N \Rightarrow 6c+2 = 2k^2$

Rezultă $3c+1 = k^2$, $3c+1 = k^2 \in \{1^2;2^2;4^2;5^2;7^2;8^2;10^2;11^2;13^2;14^2\}$.

$n^2 = 2^4\cdot(3c+1) \in \{4^2;8^2;16^2;20^2;28^2;32^2;40^2;44^2;52^2;56^2\}$

G:38. Determinaţi numerele prime a,b,c astfel încât: $4^a\cdot 8^b\cdot 16^c = 32^8$. ***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare: Relaţia dată se mai scrie $2^{2a}\cdot 2^{3b}\cdot 2^{4c}=2^{40}$, de unde 2a+3b+4c=40; Membrul stâng trebuie să fie număr par prin urmare, 3b trebuie să fie par şi cum 3 este impar atunci se ia b=2, întrucât este singurul număr prim care este şi par. Rezultă a+2c=17, a, c numere prime. Se obţin soluţiile (3; 2; 7), (7; 2; 5), (11; 2; 3), (13; 2; 2).

G:39. Determinaţi x $\in$ N astfel încât $\frac{5x-49}{20}$ să ia valoarea cea mai mică.

***Prof.* Lupşan Rodica**

Rezolvare: Condiţia care se impune este ca $5x-49\langle 20$, iar cea mai mică valoare pe care o poate lua fracţia este pentru x=10.

G:40. Aflaţi x, dacă fracţia $\frac{529}{(2x+3)^2}$ este echiunitară. ***Prof.* Ion Stănescu**

Rezolvare: Condiţia ca fracţia să fie echiunitară implică $(2x+3)^2=529$, de unde 2x+3=23, rezultând că x=10.

Clasa a VI - a

G:41. Determinaţi două fracţii, astfel ca diferenţa lor să fie egală cu produsul lor.

***Prof.* Luca Tuţă**

Rezolvare: Fie x şi y cele două fracţii. Conform enunţului problemei:

$x-y=x\cdot y\Leftrightarrow x=y(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{x}{x+1}$ (*) Notând $x=\frac{a}{b}$ şi $y=\frac{c}{d}$ se obţine din relaţia (*) că

$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}:(\frac{a}{b}+1)\Leftrightarrow\frac{c}{d}=\frac{a}{a+b}$. Aşadar cele două fracţii care verifică enunţul problemei sunt: $\frac{a}{b}\ si\ \frac{a}{a+b}$.

G:42. Să se afle restul împărţirii lui 5^{6^n} la 11. ***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $5^{6^n}=5^{(5+1)^n}=5^{5k+1}=(5^5)^k\cdot 5=(3124+1)^k\cdot 5=3124\cdot k+5=$
$=11\cdot 284\cdot k+5$. De aici se observă că restul la împărţirea cu 11 este 5.

G:43. Fie a şi b două numere naturale nenule.

a) Să se arate că dacă $(a,b)=1$, atunci $(a+b,ab)=1$.

b) Să se arate că $(a+b,ab)=1$, atunci $(a,b)=1$.

Prof. Constantin Apostol

Rezolvare: a) Fie d un divizor diferit de 1 al lui a. $Din\ d|a\ si\ (a,b)=1$, rezultă că d nu divide b, căci d nu divide suma a+b; dar $d|ab,\ asadar,\ (a+b,ab)=1$. Acelaşi raţionament îl putem face pentru orice divizor, diferit de 1, al lui a şi, analog pentru orice divizor, diferit de 1, al lui b.

b) Fie d un divizor diferit de 1 al lui a. $Din\ d|a\ si\ (a+b,ab)=1\Rightarrow d|ab$, şi nu divide suma a+b, de unde deducem că d nu divide b; aşadar a şi b sunt prime între ele. Raţionamentul este acelaşi pentru orice divizor, diferit de 1, al lui a respectiv b.

G:44. Să se rezolve în $Z\times Z$ ecuaţia: $2009\cdot x+2008\cdot y=2011$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: Ecuaţiile de tipul $ax+by=c$, unde $a,b,c\in Z, ab\neq 0$ se numesc *ecuaţii diofantice,* şi au soluţii dacă şi numai dacă $d=(a,b)$ divide c.Soluţia acestor ecuaţii este dată de:

$x=x_0+\frac{tb}{d}$, $y=y_0-\frac{ta}{d}$, unde x_0 şi y_0 sunt *soluţii particulare* , iar, $t\in Z$.

În cazul nostru, se observă uşor că $d=(2009,2008)=1,$ deoarece $2008=2^3\cdot 251$ şi $2009=7^2\cdot 41$, deci ecuaţia are soluţii pentru că 1 divide 2011.Apoi, intuim $x_0=3$ şi $y_0=-2$, soluţii particulare.
Soluţia generală este : $x=3+2008\cdot t$, $y=-2-2009\cdot t$, $t\in Z$.

G:45. Se consideră n numere naturale nenule şi diferite între ele, notate o dată cu $a_1,a_2,...,a_n$ şi apoi, în altă ordine $b_1,b_2,...,b_n$. Arataţi că nu putem avea: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

***Prof.* Ştefana Ispas**

Rezolvare: Tinand seama de enunt, rezulta ca exista $k\in N$, $1\le k\le n$, astfel încat $a_k\neq b_k$ şi, totodată, $a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n$. Presupunem prin absurd că are loc şirul de egalităţi din enunţ. Atunci: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_k}{b_k}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}=1$, de unde rezultă ca $a_k=b_k$.
Se ajunge la o contradicţie, ceea ce arată că presupunerea facută este falsă.

G:46. Să se rezolve în N* ecuaţia: $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+..+n}=\frac{1004}{1005}$.

***Prof.* Gheorghe Struţu, Prof. Ligia Struţu**

Rezolvare: Folosind formula $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pentru fiecare din numitorii fracţiilor se obţine: $\frac{n-1}{n+1}=\frac{1004}{1005}$, de unde rezultă n=2009.

G:47. Să se simplifice raportul $\frac{\overline{aaa}-\overline{bbb}+\overline{ccc}}{\overline{ddd}}$.

***Prof.* Lupşan Rodica**

Rezolvare: Raportul dat este egal cu $\frac{(a-b+c)\cdot 111}{d\cdot 111}=\frac{a-b+c}{d}$

G:50. Determinaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că sunt exprimate prin numere prime.

Prof. Simion Marin

Rezolvare: Cum suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este exprimată printr-un număr par, şi anume 180^0, aceasta implică obligatoriu să luăm măsura unui unghi de 2^0, singurul număr par care se poate lua ca să fie şi par, iar celelalte se iau impare şi prime astfel încât suma lor să fie de 178^0. Rezultă soluţiile:
(2^0; 5^0; 173^0), (2^0; 11^0; 167^0), (2^0; 29^0; 149^0), (2^0; 41^0; 137^0), (2^0; 71^0; 107^0), (2^0;89^0; 89^0).

G:51. Două unghiuri complementare au raportul dintre suma şi diferenţă măsurilor lor, 15. Aflaţi măsurile unghiurilor.

***Prof.* Ion Stănescu**

Rezolvare: Fie A şi B măsurile celor două unghiuri, iar conform enunţului problemei scriem: A+B=90, (A+B):(A-B)=15. De aici se obţine că $A=48^0$ şi $B=42^0$.

Clasa a VII - a

G:52. Să se calculeze x+y dacă: $x^4=y^4+48$, $x^2+y^2=12$ si x=y+2.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: $x+y=\dfrac{x^4-y^4}{(x^2+y^2)(x-y)}=\dfrac{48}{12\cdot 2}=2$.

G:53. Fie $a=2^2+4^2+6^2+....+2008^2$ *si* $b=1^2+3^2+5^2+....+2007^2$. Calculaţi $\dfrac{a-b}{1004}$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: $a-b=(2008^2-2007^2)+(2006^2-2005^2)+(2004^2-2003^2)+...+(2^2-1^2)=$
$(2008-2007)(2008+2007)+(2006-2005)(2006+2005)+(2004-2003)(2004+2003)+\ldots+(2-1)(2+1)=1\cdot(2008+2007)+1\cdot(2006+2005)+1\cdot(2004+2003)+...+1\cdot(2+1)=$
$=1+2+3+...+2008=\dfrac{(1+2008)\cdot 2008}{2}=2009\cdot 1004$. Rezultă $\dfrac{a-b}{1004}=2009$.

G:54. Să se arate că suma pătratelor a trei numere întregi consecutive impare, adunată cu 1 dă un număr divizibil cu 12.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12(n^2+n+1)\vdots 12$

G:55. Arataţi că orice număr din şirul 1, 2, 3, ..., n este divizorul a cel puţin unui număr din şirul n+1,n+2,...,2n.

***Prof.* Ştefana Ispas**

Rezolvare:
Fie d un element al şirului 1, 2, 3, ..., n. Aplicând numerelor n si d teorema împarţirii cu rest, rezultă că există $q,r\in N$ astfel încât n=dq+r si $0\le r<d$, $\Rightarrow$ n+d-r=d(q+1) si $0\le r<d$.
Deoarece $1\le d-r\le n$, rezultă că $n+1\le n+d-r\le 2n$, deci n+d-r este un element al şirului n+1, n+2,..., 2n. Acest rezultat, împreună cu egalitatea n+d-r=d(q+1), ne arată că d divide un element al şirului n+1, n+2,..., 2n.

G:56. Să se rezolve în $Q\times Q$ ecuaţia:

$2x\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}$

Prof. Constantin Apostol

Rezolvare: Ecuaţia dată este echivalentă cu $2\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot x-2\cdot x\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot y=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}\Leftrightarrow$

$\sqrt{10}(x-y-5)=\sqrt{6}(9-x-y)\Rightarrow$ x-y-5=0 şi 9-x-y=0 deoarece se caută soluţiile în Q.

Acestea sunt x=7 şi y=2.

G:57. Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{1}{2\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 20}+...+\dfrac{1}{20\cdot 29}+...+\dfrac{1}{1997\cdot 2006}=\dfrac{167}{x\cdot(3010-x)}$.

***Prof.* Gheorghe Struţu, *Prof.* Ligia Struţu**

Rezolvare: Pentru fiecare termen al sumei vom aplica descompunerea în fracţii simple de forma $\dfrac{1}{n(n+9)}=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. Ecuaţia dată devine: $\dfrac{167}{3009}=\dfrac{167}{x(3010-x)}$ de unde x=1 sau x=3009.

G:58. Să se arate că numărul $x=\sqrt{\underbrace{\overline{100...0200...01}}_{2n+3\ cifre}}$ **este natural.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru**

Rezolvare: $x=\sqrt{\underbrace{\overline{100...0200...01}}_{2n+3\ cifre}}=\sqrt{1\cdot 10^{2n+2}+...+2\cdot 10^{n+1}+...+1}=\sqrt{(10^{n+1}+1)^2}=10^{n+1}+1\in N$

G:59. Să se arate că ecuaţia $x^3=64^y+15$ **nu are soluţii în NxN.**

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare:. Cuburile perfecte prin împărţire la 7 dau resturile 0, 1 sau 6. Puterile lui 2 prin împărţire la 7 dau resturile 1, 2 sau 4. Numerele 64^y+15 prin împărţire la 7 dau resturile 2, 3 sau 5. Rezultă că ecuaţia nu are soluţii în $N\times N$.

G:60. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\hat{A})=90^0$ **şi** $m(\hat{C})=15^0$**, înălţimea din A este un sfert din lungimea ipotenuzei şi să se determine sin15^0.**

Prof. **Gheorghe Dârstaru**

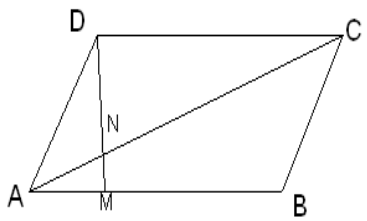
Rezolvare: Fie triunghiul ABC dreptunghic, cu $m(\hat{A})=90^0$, $m(\hat{C})=15^0$, [AD] înălţime şi [AO] mediană.

Atunci $m(A\hat{O}C)=150^0\Rightarrow m(A\hat{O}B)=30^0\Rightarrow AD=\frac{AO}{2}, dar\ AO=\frac{BC}{2}$ ca mediană în triunghiul dreptunghic ABC. Rezultă că $AD=\frac{BC}{4}$. Pentru a calcula sin15^0, notăm cu x lungimea lui [AD], rezultând AO=2x, BC=4x. Cum sin15^0= $\sin\hat{C}=\frac{AD}{AC}$, mai rămâne să aflăm lungimea lui [AC]. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADO, obţinem $OD=x\sqrt{3}$ de unde AC se scoate din triunghiul dreptunghic ADC.

$$AC=x(\sqrt{6}+\sqrt{2})\Rightarrow \sin 15^0=\frac{x}{x(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

G:61. Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{n}, M\in(AB)$ **dacă si numai dacă** $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{n+1}$ **unde** $\{N\}\in AC\cap MD$**, iar** $n\in N, n\geq 2.$ ***Prof.*** **Tuţă Luca**

Rezolvare:



"$\Rightarrow$" Fie $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{n}$. Triunghiurile ANM şi CND sunt asemenea (U.U.) întrucât, $D\hat{C}N\equiv N\hat{A}M$, (alterne interne), $D\hat{N}C\equiv M\hat{N}A$ (opuse la vârf). De aici, şi ţinând cont că $[DC]\equiv[AB]$ (*)

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow \frac{AN}{AN+NC}=\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{1}{n+1}.$$

"$\Leftarrow$" Fie $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{n+1}$. Aplicând proporţii derivate obţinem

$\frac{AN}{AC-AN}=\frac{1}{n+1-1}\Leftrightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{1}{n}$. Mai departe din (*) şi din asemănarea triunghiurilor ANM şi CND rezultă $\frac{AM}{DC}=\frac{AN}{NC}=1\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{1}{n}$.

G:64. Arătaţi că aria unui trapez dreptunghic ortodiagonal este egală cu produsul dintre media aritmetică şi media geometrică a lungimilor bazelor.

***Prof.* Simion Marin**

Rezolvare: Fie ABCD un trapez ortodioagonal cu diagonalele $AC \perp BD$. Din asemănarea triunghiurilor BAD şi ADC se obţine $AD = \sqrt{AB \cdot DC}$, de unde $A_{ABCD} = \frac{(AB+DC)\cdot AD}{2} = \frac{AB+DC}{2} \cdot \sqrt{AB \cdot DC}$.

G:65. Un dreptunghi are aria egală cu aria unui pătrat. Dacă perimetrele lor sunt egale, cum sunt dimensiunile dreptunghiului, comparative cu latura pătratului?

***Prof.* Ion Stănescu**

Rezolvare: Notăm dimensiunile dreptunghiului cu L şi l, iar lungimea laturii pătratului cu a. Obţinem: $L \cdot l = a^2$; $2(L+l) = 4a$. $L+l = 2a$, $L = 2a - l$; $l(2a- l) = a^2$; $(a - l)^2 = 0$, $l = a$; $L = a$.

G:66. Demonstraţi că într-un triunghi ABC, $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B}) \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$

***Prof.* Ana Panaitescu**

Rezolvare:

"$\Rightarrow$" Prelungim segmentul [BA] cu segmentul [AC'] astfel încât [AC'] ≡ [AC]; facem notaţiile AC=b, AB=c, BC= a lungimile laturilor triunghiurilor si α = m(<ABC).

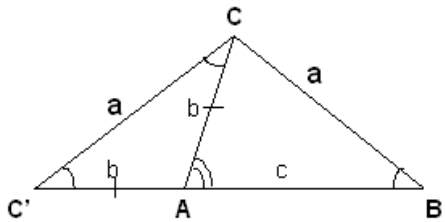
Deoarece unghiul BAC este exterior triunghiului isoscel C´AC si

$m(\hat{A}) = 2\alpha \Rightarrow m(A\hat{C}C') = m(A\hat{C}'C) = \alpha \Rightarrow \Delta BCC'$ este isoscel cu CC'=a.

Din asemănarea ΔBCC´ cu ΔC´AC deducem: $\frac{BC}{CA} = \frac{BC'}{CC'}$, adică tocmai relaţia **a2=b(b+c).**

"$\Leftarrow$" Cu notaţiile precedente, relaţia **a2=b(b+c)** se transcrie $\frac{CC'}{AC'} = \frac{BC'}{CC'}$ şi din faptul că unghiul C'este comun, rezultă că triunghiurile BCC' şi CAC' sunt asemenea , de unde rezultă că $\hat{B} \equiv C'\hat{C}A$

Rezultă că $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$ ca unghi exterior triunghiului CCC'.



Clasa a VIII - a

G:67. Să se arate că numărul $3^{3n+1} + 2 \cdot 3^{n+1}$ se poate scrie ca o sumă de cuburi a trei numere naturale consecutive.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $3^{3n+1} + 2 \cdot 3^{n+1} = (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 \Rightarrow 3(3^{3n} + 2 \cdot 3^n) = 3(x^3 + 2x)$.

Pentru $x=3^n$, numărul dat se scrie ca o sumă de trei cuburi.

G:69. Să se stabilească semnul numărului

$a = (\sqrt{2008} - 1) \cdot (\sqrt{2007} - 2) \cdot (\sqrt{2006} - 3) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{1} - 2008)$.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $a \rangle 0$, pentru că sunt 2008 paranteze din care 44 pozitive întrucât $\sqrt{2009 - n} - n \rangle 0$, pentru $n \leq 44$

G:70. Determinati patratul numarului A= $\underbrace{33...34}_{n-1 \text{ cifre}}$**.**

***Prof*. Ştefana Ispas**

Rezolvare:

Avem: $A^2 = (3 \cdot \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} + 1)^2 = 9 \cdot \underbrace{11...1^2}_{n \text{ cifre}} + 6 \cdot \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} + 1 =$

$= \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}}(9 \cdot \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} + 6) + 1 = \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}}(\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre}} + 6) + 1 = \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}}(10^n - 1 + 6) + 1 =$

$= \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} \cdot 10^n + 5 \cdot \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} + 1 = \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}} \cdot 10^n + \underbrace{55...56}_{n-1 \text{ cifre}} = \underbrace{11...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{55...56}_{n-1 \text{ cifre}}$

G:71. Să se determine valorile reale ale lui x şi y astfel încât expresia
$E(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 39x^2 - 39y^2 + 2xy - 12x - 12y + 437$ **să admită valoare minimă.**

***Prof*. Gheorghe Struţu**

Rezolvare: Relaţia dată se mai scrie $E(x,y) = (x + y - 6)^2 + (x^2 + y^2 - 20)^2 + 1$ cu un minim de 1 ce se realizează pentru x=4 şi y=2 sau x=2 şi y=4

G:73. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi m **şi** n**, de parităţi diferite, există numerele întregi** a **şi** b**, astfel încât,** $a(a+m) = b(b+n)$**.**

***Prof*. Constantin Apostol**

Rezolvare: Egalitatea dată poate fi scrisă , echivalent:
$a^2 + am = b^2 + bn \Big| \cdot 4 \Leftrightarrow 4a^2 + 4am + m^2 - m^2 = 4b^2 + 4bn + n^2 - n^2$, de unde obţinem prin descompunere $(2a + m - 2b - n)(2a + m + 2b + n) = m^2 - n^2$. De aici se găsesc valorile $a = \frac{(m-1)^2 - n^2}{4} \; si \; b = \frac{m^2 - (n+1)^2}{4}$. Întrucât m şi n au parităţi diferite, deducem că a şi b sunt întregi:

$\begin{cases} a = (k_1 - k_2 - 1)(k_1 + k_2) \\ b = (k_1 - k_2 - 1)(k_1 + k_2 + 1) \end{cases}$, *dacă* $m = 2k_1, \; n = 2k_2 + 1$ sau

$\begin{cases} a = k_1^{\,2} - k_2^{\,2} \\ b = (k_1 - k_2)(k_1 + k_2 + 1) \end{cases}$, *dacă* $m = 2k_1 + 1, \; n = 2k_2$

G:75. Rezolvaţi in R inecuaţia: $\left| \frac{x+4}{x-2} \right| \le 3$**.**

***Prof*. Ion Stănescu**

Rezolvare: Din rezolvarea dublei inegalităţi $-3 \le \frac{x+4}{x-2} \le 3$ se obţine $x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [5; +\infty)$

G:76. Se consideră un cub pentru care volumul plus perimetrul bazei este egal cu aria laterală. Câţi metri are lungimea diagonalei cubului?

***Prof*. Neculai Stanciu**

Rezolvare: Dacă latura cubului este a , atunci condiţia implică $a^3 + 4a = 4a^2$, sau $a(a^2 - 4a + 4) = a(a-2)^2 = 0$ .Deci $a = 2$, şi diagonala are lungimea $2\sqrt{3}$ m .

G:78. În vârful A al unui triunghi dreptunghic ABC cu lungimea catetelor AB=3 cm şi AC=4 cm, se ridică perpendiculara SA pe planul triunghiului, astfel încât SA= $\frac{12}{5}cm$ **. Să se afle:**

a) distanţa de la S la latura [BC];
b) măsura unghiului diedru format de planele (SBC) şi (ABC);
c) aria totală şi volumul tetraedrului SABC.

Prof. **Luca Tuţă**

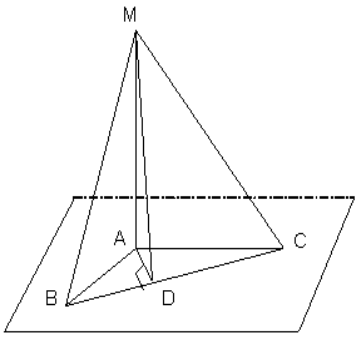
Rezolvare: a) Fie $D \in [BC]$ $AD \perp BC$; conform teoremei celor trei perpendiculare se arată că $d(S,BC) = SD$ iar calculul ei se face din triunghiul SAD, $m(S\hat{A}D) = 90^0$. $SD = \frac{12}{5}\sqrt{2}cm$.

b) $m((SBC),(ABC)) = m(SD,AD) = m(S\hat{D}A) = 45^0$.

c) $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot VA = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8cm^3$.

G:79. Pe planul triunghiului ABC având $m(\hat{C}) = 30^0, m(\hat{A}) = 90^0$ **şi perimetrul egal cu** $24 + 24\sqrt{3}$ **cm, se ridică perpendiculara AM de 12 cm. Determinaţi măsura unghiului format de planele (MBC) şi (ABC).**

Prof. **Simion Marin**



Rezolvare: Cum în triunghiul dreptunghic $m(\hat{C}) = 30^0 \; si \;\; m(\hat{A}) = 90^0$, notăm cu x lungimea lui AB, atunci BC =2x, conform Teoremei catei care se opune unui unghi de 30^0, iar $AC = x\sqrt{3}$, conform Teoremei lui Pitagora în triunghiul ABC. Din $P_{ABC} = 24 + 24\sqrt{3}$ rezultă, $AB = 8\sqrt{3}, BC = 16\sqrt{3}, AC = 24$.
Fie $AD \perp BC$, şi cum $AM \perp (ABC) \Rightarrow MD \perp BC$, conform teoremei celor trei perpendiculare;
Cum $AD = \frac{AC}{2} \Rightarrow AD = 12 \;\; iar \;\; în \;\; \Delta MAD \Rightarrow AM = AD = 12$
Aşadar, $m\big((MBC),(ABC)\big) = m(M\hat{D}A) = 45^0$.

Clasa a IX – a

L:30. Să se arate că toate parabolele care sunt reprezentările geometrice ale graficelor funcţiilor de gradul II, cu coeficienţi diferiţi din aceeaşi mulţime de trei numere reale nenule, au un punct comun.

Prof. **Constantin Apostol**

Rezolvare: Toate parabolele care sunt reprezentările geometrice ale graficelor funcţiilor de gradul II, care au coeficienţii diferiţi dintr-o mulţime $\{a;b;c\} \subset R^*$, au punctul comun cu abcisa 1 şi ordonata a+b+c, adică punctul M(1; a+b+c).

L:31. Să se rezolve în R* ecuaţia $\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 3$, **unde [a] reprezintă partea întreagă a lui a, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a.**

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare: I. Dacă $x < 0$, atunci $\frac{1}{x} < 0$, aşa că $\left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x} < 0$ .Analog , $\left[\frac{3}{x}\right] < 0$, deci nu putem avea $\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 3$.Rezultă că $x > 0$.

II. Dacă $x>0$, avem $\frac{1}{x}<\frac{3}{x}$, deci $\left[\frac{1}{x}\right]\le\left[\frac{3}{x}\right]$.Deoarece $\left[\frac{1}{x}\right]$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]$ sunt întregi avem două posibilităţi:

II.1. $\left[\frac{1}{x}\right]=0$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]=3$.

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right]=0\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow x>1\\ \left[\frac{3}{x}\right]=3\Leftrightarrow 3\le\frac{3}{x}<4\Leftrightarrow\frac{3}{4}<x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

II.2. $\left[\frac{1}{x}\right]=1$ şi $\left[\frac{3}{x}\right]=2$

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right]=1\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{x}<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x\le 1\\ \left[\frac{3}{x}\right]=2\Leftrightarrow 2\le\frac{3}{x}<3\Leftrightarrow 1<x\le\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Din analiza făcută rezultă că ecuaţia nu are soluţii.

L:32. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, a_{3,}.... a_{2n-1}, a_{2n,}$ $n\in N^*$, în această ordine, în progresie aritmetică şi $S=a_1{}^2-a_2{}^2+a_3{}^2-a_4{}^2+....+a_{2n-1}{}^2-a_{2n}{}^2$. Să se arate că $S=\frac{n}{2n-1}(a_1{}^2-a_{2n}{}^2)$. ***Prof.*** **Constantin Dinu**

Rezolvare: $a_{2k-1}^2-a_{2k}^2=-r(a_{2k-1}-a_{2k}),\forall k=\overline{1,n}\Rightarrow S=-nr(a_1+a_{2n})\Rightarrow$

$$S=\frac{-nr(a_1^2-a_{2n}^2)}{-(2n-1)r}=\frac{n(a_1^2-a_{2n}^2)}{2n-1}.$$

L:33. Fie $a_n=2^{1-n}\cdot 3^n$, $n\in N^*$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie geometrică;

b) Determinaţi $n\in N^*$ astfel încât suma $a_1+a_2+a_3+...+a_n=\frac{195}{32}$.

Prof. **Constantin Dinu**

Rezolvare: a) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\frac{3}{2},\forall n\in N^*$;

b) Cum $a_1+a_2+....+a_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\Rightarrow 3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{195}{32}$; Rezolvând ecuaţia în n se obţine n=4.

Clasa a X - a

L:34. Să se determine numerele reale $x, y, z \in R$ din ecuaţia:

$\sqrt{2^x(4^y+8^z)}+\sqrt{4^y(8^z+2^x)}+\sqrt{8^z(2^x+4^y)}=\sqrt{2}(2^x+4^y+8^z)$. ***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Făcând notaţiile $a=3^x, b=5^y, c=7^z$, se obţine relaţia

$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}=\sqrt{2}(a+b+c)$, pentru care se utilizează inegalitatea

$\sqrt{a(b+c)} \le \sqrt{2}(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4})$ şi celelalte două, de unde rezultă că suma radicalilor din stânga egalităţii este mai mică sau egală cu $\sqrt{2}(a+b+c)$. Rezultă că egalitatea dată are loc când a=b=c, adică

$3^x=5^y=7^z \Rightarrow x\ln 3=y\ln 5=z\ln 7=k\in R \Rightarrow x=\frac{k}{\ln 3}, etc.$

L:35. Fie $a, b \in R_+$, cu a+b=1.

a) Să se arate că: $a^2 \cdot b \le \frac{4}{27}$;

b) Să se determine valoarea maximă a funcţiei f:R→R, $f(x)=\cos^2 x \cdot \sin x$.

***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare: a) $\frac{a^2\cdot b}{4}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b \le \left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3}\right)^3=\frac{1}{27}, cu\ egalitate\ când\ a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3};$

b) Observăm că pentru $a=\cos^2 x$ şi $b=\sin^2 x$, rezultă a+b=1, a,b reale şi pozitive, atunci se obţine

$f^2(x)=\cos^4 x\cdot\sin^2 x \le \frac{4}{27} \Rightarrow f(x) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}, \forall x \in R;$

Clasa a XI - a

L:36. a) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ şi $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x)$.

b) Să se determine parametrii a şi b astfel încât $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+x+1}+2ax+3b)=3.$

***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare: a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\frac{1}{2}; \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x)=\frac{1}{3};$

b) $\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+1}-x)-(\sqrt{x^2+x+1}-x)+2ax+3b\right]=3 \Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2ax+3b)=3 \Rightarrow a=0; b=\frac{19}{18};$

L:37. Să se arate că ecuaţia $a^x=bx^2+cx+d$ are cel mult trei rădăcini reale $\forall a\rangle 1$,$\mathbf{b}\in R^+$;$\mathbf{c,d}\in R$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

Rezolvare: Fie $f: R\to R$, $f(x)=a^x-bx^2-cx-d$ şi presupunem prin reducere la absurd că are 4 rădăcini deci $f''(x)=o$ are cel puţin 2 rădăcini. Dar cum $f''(x)=a^x\ln^2 a-2b=0 \Leftrightarrow \quad a^x=\frac{2b}{\ln^2 a}$ are o singură soluţie, rezultă că f are cel mult 3 rădăcini.

L:38. Să se calculeze matricea: $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} k^3 & k(3k+1) \\ (2k-1)^2 & k^2 \end{pmatrix}$.

Prof. **Gheorghe Struţu**

Rezolvare: $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} k^3 & k(3k+1) \\ (2k-1)^2 & k^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 & n(n+1)^2 \\ \frac{n(4n^2-1)}{3} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{pmatrix}$

L:39. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2008 \\ 2008 & 1 & 2 & ... & 2007 \\ 2007 & 2008 & 1 & ... & 2006 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 3 & 4 & ... & 1 \end{pmatrix}\in M_{2008}(R)$. **Calculaţi** $\det A$.

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare:

O matrice de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & ... & a_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \end{pmatrix}$ se numeşte circulant .Determinantul acestei matrice se

calculează mai uşor cu relaţia (1) $\det A=\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot...\cdot\lambda_{n-1}$, unde λ_k, $k=\overline{0,n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A.Dacă notăm cu ε_k, $k=\overline{0,n-1}$, rădăcinile de ordinul n ale unităţii, atunci, se demonstrează că valorile proprii sunt de tipul (2) $\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+...+a_n{\varepsilon_k}^{n-1}$.

Se obţine din (1) şi (2) $\det A=\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$.

În cazul nostru luăm (3) $a_1=1,a_2=2,...,a_{2008}=2008$ şi ε_k, $k=\overline{0,2007}$ sunt rădăcinile de ordinul 2008 ale unităţii. Rezultă $\det A=\prod_{k=0}^{2007}(1+2\varepsilon_k+3{\varepsilon_k}^2+...+2008{\varepsilon_k}^{2007})$.

L:40. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & ... & 2^{2007} \\ 2^{2007} & 1 & 2 & ... & 2^{2006} \\ 2^{2006} & 2^{2007} & 1 & ... & 2^{2005} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 1 \end{pmatrix}\in M_{2008}(R)$. **Calculaţi** $\det A$.

Prof. **Neculai Stanciu**

Rezolvare:

Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & ... & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x & x^2 & x^3 & ... & 1 \end{pmatrix}$, atunci folosind relaţia (1) de la exerciţiul precedent întrucât A se

numeşte circulant, rezultă că $\det A=\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot...\cdot\lambda_{n-1}=\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+...a_n{\varepsilon_k}^{n-1})$, şi pe de altă parte ,

observăm că deoarece $u^n=1$, atunci avem:

$1+xu+\ldots+(xu)^{n-1}=\dfrac{(xu)^n-1}{xu-1}=\dfrac{x^n-1}{xu-1}$(*), $\Rightarrow \det A=\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^n-1}{x\varepsilon_k-1}=\dfrac{(x^n-1)^n}{(-1)^n(1-x^n)}=(1-x^n)^{n-1}$.

În cazul nostru $x=2$ şi $n=2008$, iar din (*) avem $\det A=(1-2^{2008})^{2007}$.

Clasa a XII - a

L:41. Calculaţi $I(x)=\int\dfrac{\arccos(e^x)}{e^x}dx,\ \ x\in(-\infty,0)$.

***Prof.* Constantin Dinu**

Rezolvare: Se face substituţia

$e^x=t\in(0,1),\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow x=\ln t\Rightarrow I=\int\dfrac{\arccos t}{t^2}dt=\int\arccos t\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)'dt=$

$=-\dfrac{1}{t}\arccos t-\int\dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt$

$Cum\ \int\dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt=\int\dfrac{1}{t^2\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}}dt=-\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}}-\ln(u+\sqrt{u^2-1})\Rightarrow$

$I(x)=-\dfrac{1}{e^x}\arccos e^x-x+\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C$.

L:42. Să se arate că $\int_0^2\sqrt{2^x}dx+2\int_1^2\log_2 xdy=4.$

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: Notăm $\sqrt{2^x}=y\Rightarrow x=\log_2 y^2=2\log_2 y;\ \ x=0\Rightarrow y=1;x=2\Rightarrow y=2\Rightarrow$

$\int_0^2\sqrt{2^x}dx=\int_1^2 y\cdot(2\log_2 y)'dy=y\cdot 2\log_2 y\Big|_1^2-\int_1^2 2\log_2 ydy$; De aici rezultă relaţia dată.

L:43. Să se calculeze $\int x\cdot(tg^2x+2009)dx$.

***Prof.* Adrian Stan**

Rezolvare: $\int x\cdot(tg^2x+2009)dx=\int x(tg^2x+1)dx+\int 2008xdx=\int x\cdot(tgx)'dx+2008\cdot\dfrac{x^2}{2}=$

$xtgx+\ln\cos x+1004x^2+C$

„ Cu cât eşti mai înţelept, cu atât îţi dai mai bine seama că pe lume există mulţi oameni deosebiţi. Oamenii de duzină nu observă nicio deosebire între semenii lor.”

Blaise Pascal

" Pentru un elev este esențial cum rezolvă problemele, pentru un profesor cum le pune."
(Grigore C. Moisil),

5. Probleme propuse

Clasa a III-a

P:64. Deîmpărţitul este 22, restul 2. Află împărţitorul şi câtul. (există 4 soluţii)

Înv. Ene Rodica, Berca

P:65. Suma a patru numere este 36. Dacă din fiecare se ia acelaşi număr, se obţin numerele: 2, 4, 6, 8.
Află numerele iniţiale.

Înv. Ene Rodica, Berca

P:66. Şapte lădiţe cu cireşe cântăresc 63 kg. Câte kg vor cântări 106 lădiţe identice?

Înv. Ene Rodica, Berca

P:67. Diferenţa a ouă numere este 580. Dacă din primul număr luăm şi celui de-al doilea îi adăugăm 20, primul devine întreitul celui de-al doilea.
Care sunt cele două numere?

Înv. Ene Rodica, Berca

P:68. O cutie cu 25 de bomboane cântăreşte 600 de grame, iar altă cutie cu numai 15 bomboane cântăreşte 400 de grame.
Cât cântăreşte cutia goală?

Înv. Lupşan Ion, Pleşcoi

P:69. Se dă următorul şir de numere: 80, 6, 11, 75, 8, 22, 70, 10, 33. Respectaţi regula conform căreia a fost compus acest şir şi alcătuiţi un alt şir de 9 numere naturale, astfel încât al doilea să fie 8, al şaselea să fie 55, iar al şaptelea să fie 60.

Înv. Lupşan Nicoleta – Gabriela, Berca

P:70. Diferenţa dintre două numere este 2. Aflaţi numerele, ştiind că suma dintre dublul primului număr şi triplul celui de-al doilea este 104.

Inst. Marcela Marin, Rm. Sărat

P:71. Într-o fructieră sunt banane. George a mâncat până a rămas o treime din numărul lor. Mama a mai pus 7 banane. Acum în fructieră sunt 12 banane.
Câte banane au fost la început în fructieră?

Înv. Marchidanu Florica, Berca

P:72. Într-o tabără, echipa fetelor a strâns cu 24 kg mai multe plante medicinale decât echipa băieţilor, ceea ce înseamnă că fetele au strâns, în total, de 3 ori mai multe kg de plante decât băieţii.
Câte kg de plante medicinale a strâns fiecare echipă?

Înv. Vrabie Marioara, Berca

P:73. Într-o tabără au sosit câte 60 de elevi din nouă şcoli ale judeţului Buzău. Unii au fost cazaţi în 47 de camere a câte opt paturi, iar restul în dormitoare cu mai multe paturi. Câţi elevi au fost cazaţi în dormitoare?

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

Clasa a IV-a

P:74. Aflaţi două numere a căror sumă este 485 şi unul din numere este de două ori mai mare decât dublul celuilalt.

Inst. Anton Maria, Berca

P:75. Suma a trei numere este 720. Primul număr este de două ori mai mare decât al doilea şi de 3 ori mai mic decât al treilea număr.

Aflaţi cele trei numere.

Inst. Anton Maria, Berca

P:76. Diferenţa a două numere este 3079. Dacă le împărţim obţinem câtul 6 şi restul 4.

Care sunt numerele?

Inst. Anton Maria, Berca

P:77. S-au cumpărat caiete şi pixuri, în total 12 bucăţi, plătindu-se 238 lei. Ştiind că numărul caietelor a fost de 5 ori mai mare decât al pixurilor, iar un pix a costat cu doi lei mai puţin decât jumătate din preţul unui caiet, aflaţi preţul fiecărui obiect.

Elev Neacşu Teodor Înv. Avrigeanu Felicia, Berca

P:78. Să se afle două numere, ştiind că al doilea este de 3 ori mai mare decât primul, iar suma dintre dublul primului număr şi dublul celui de-al doilea este 480.

Înv. Axente Mirela, Berca

P:79. Trei fraţi au împreună 51 de ani. Când cel mai mic avea 6 ani, cel mijlociu avea dublul vârstei acestuia, iar cel mare avea cât cei doi la un loc.

Câţi ani are fiecare acum?

Înv. Lupşan Nicoleta – Gabriela, Berca

P:80. Suma dintre o şesime dintr-un număr şi dublul altuia este 500. Să se afle numerele ştiind că primul este de trei ori mai mare decât celălalt.

Inst. Marcela Marin, Rm. Sărat

P:81. În patru clădiri sunt cazaţi 436 de muncitori. În a doua sunt cu 10 muncitori mai mulţi ca-n a treia şi în a patra cu 6 muncitori mai mulţi decât în a doua clădire, iar în prima cât în a doua.

Câţi muncitori sunt în fiecare clădire?

Înv. Lupşan Constantin, Berca

P:82. La o fermă de păsări, într-o hală sunt 116 găini şi de 7 ori mai mulţi pui. $\frac{1}{4}$ din numărul puilor se vând.

Câte păsări rămân în hală?

Înv. Lupşan Constantin, Berca

P:83. Ştiind că: $a + b + c = 70$ şi $a + 2b + 3c = 136$ atunci să se calculeze $2a + b$.

Înv. Lupşan Ion, Pleşcoi

P:84. Suma a trei numere este 1001. Dacă din primul se scade triplul numărului 29, din al doilea, răsturnatul numărului 631 şi din al treilea, sfertul numărului 484, numerele obţinute sunt egale. Care sunt cele trei numere?

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

P:85. Un elev şi-a cumpărat cărţi, un ghiozdan şi acuarele, plătind 181 lei. Ştiind că pentru ghiozdan a plătit cu 44 de lei mai mult decât pentru acuarele, iar cărţile l-au costat cu 75 de lei mai mult decât ghiozdanul, aflaţi cât au costat acuarelele, ghiozdanul şi cărţile.

Înv. Doina Vizitiu, Măgura

- *GIMNAZIU*

Clasa a V – a

G:80. Determinaţi **x** astfel încât numerele $a=(3^{11})^{3^2}+(3^3)^{33}+(27^3)^{11}\cdot x$ şi $b=9^{50}+81^{25}+243^{20}$ să fie egale.

Prof. **Simion Marin**

G:81. Suma a două numere naturale în care unul este divizibil cu celălalt, este cu 56 mai mare decât câtul lor. Aflaţi numerele respective.

Prof. **Ion Stănescu**

G:82.Să se arate că nu există niciun număr natural n, astfel încât $2009^{2009}=9^n+2009$

Prof. **Adrian Stan**

G:83. Comparaţi numerele: $a=3\cdot 2^{88}$ şi b=$2\cdot 3^{59}$. ***Prof.*** **Tuţă Luca**

G:84. Să se rezolve în N^8 ecuaţia : $a_1^{\,2}\cdot a_2^{\,2}\cdot\ldots\cdot a_8^{\,2}=2008^8$.

Prof. **Neculai Stanciu**

G:85. Să se arate ca suma cifrelor numărului 10^{2009} – 2008 este un număr divizibil cu 2008.

Prof. **Adrian Stan**

G:86. Să se rezolve ecuaţia: $x\cdot[81^{251}-3^{4^5}:(3^4)^5:81]:80=3+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\ldots+2\cdot 3^{999}$

prof. Vasile Prefac, prof. Maritanţa Prefac

G:87. Ştiind că $\overline{abc}=\overline{bca}-\overline{acb}$, să se calculeze suma tuturor numerelor de trei cifre formate cu cifrele a,b,c, luate câte o singură dată. ***Prof.*** **Constantin Apostol**

G:88. Trei colegi au împreună 180 de lei . Dacă al treilea coleg dă celui de-al doilea 12 lei, iar al doilea dă primului 3 lei cei trei vor avea sume egale. Câţi bani are fiecare copil?

Prof. Gheorghe Dârstaru

Clasa a VI – a

G:89. a) Să se arate că numărul $N=4^{4n+2}\cdot 5^{3n+3}+2^{8n+1}\cdot 5^{3n+1}-2^{8n}\cdot 5^{3n}$ este divizibil cu 2009.
b) Să se determine numerele naturale n astfel încât ultima cifră nenulă a lui N să fie 6.

Prof. **Adrian Stan**

G:90. Arătaţi că dacă $19\mid 2a+12b+7c$ şi $19\mid a+b+c$ atunci $19\mid a+5b+3c$, unde a,b şi c sunt numere naturale. ***Prof.*** **Neculai Stanciu**

G:91. Să se determine numerele prime a, b, c, astfel încât $81^{3a}\cdot 9^{3b}\cdot 3^{3c}=27^{28}$

Prof. Adrian Stan

G:92. Să se determine numerele naturale prime a şi b din relaţia $a\cdot b-2a+2b=2013$

Prof. Adrian Stan

G:93. Calculaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a=9^{n+2}+9^n$ şi $b=8^{n+2}-8^n, n\in N$.

Prof. **Simion Marin**

G:94. Să se rezolve în **Z**x**Z** ecuaţia: $\frac{x}{3}-\frac{3}{y}=2.$

***Prof*. Vasile Prefac, *Prof*. Maritanţa Prefac**

G:95. Arătaţi că numărul A = 176^{1005} + 121^{2008} + 239^{2009} + 62^{2010} este divizibil cu 60.

***Prof*. Gheorghe Dârstaru**

G:96. Două drepte, d_1, d_2, se întâlnesc în punctul O. Fie punctele A pe d_1, şi B pe d_2, astfel încât punctul O să se afle pe mediatoarea lui [AB]. Comparaţi distanţa de la A la d_2, şi de la B la d_1.

Prof. Ion Stănescu

G:97. Perimetrul triunghiului ABC este de 40 cm iar raportul a două laturi este $\frac{3}{4}$. Ştiind că bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C sunt congruente, aflaţi lungimea laturilor triunghiului.

Prof. Tuţă Luca

G:98. Pe laturile [OA şi [OB ale unghiului AOB se duc perpendicularele [CO pe [OA şi [DO pe [OB. Ştiind că [OF este bisectoarea unghiului AOD, [OE este semidreapta opusă laturii [OA şi $m(D\hat{O}E)=3m(A\hat{O}B)$, calculaţi măsurile unghiurilor $D\hat{O}E$ şi $E\hat{O}F$.

Prof. Tuţă Luca

Clasa a VII – a

G:99. Să se calculeze $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\right)^{2009}$.

***Prof*. Tuţă Luca**

G:100. Să se rezolve ecuaţia: $3x+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{2007\cdot 2008}=\frac{1005}{1004}$.

***Prof*. Ion Stănescu**

G: 101. Rezolvaţi în **Z**x**Z** ecuaţia: $x^2-4018y+y^2+4016x+8062145=0.$

***Prof*. Ion Stănescu**

G:102. Să se afle aria triunghiului ABC, ştiind că A,I,G sunt coliniare, AI=9cm,şi IG=1cm.(I este centru cercului înscris în triunghi, iar G este centrul de greutate).

***Prof*. Constantin Apostol**

G:103. Un trapez dreptunghic ABCD, $AB\perp BC$ are BC=a, CD=a+b şi DA=b. Fie M mijlocul laturii [AB]. Cercetaţi dacă:

a) aria trapezului este egală cu $(a+b)\cdot\sqrt{ab}$;

b) triunghiul DMC este dreptunghic.

***Prof*. Tuţă Luca**

G:104. În triunghiul ABC, [CM] este mediană, punctele E şi F se află pe latura [BC] astfel încât BE=EF=FC. Dacă [CM] intersectează pe [AE] şi [AF] în punctele P şi respectiv Q, calculaţi cât la sută din aria triunghiului ABC este aria patrulaterului PQFE.

***Prof*. Gheorghe Dârstaru**

G:105. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b şi c care verifică relaţia:

$2a+3b+4c=4\sqrt{2a-2}+6\sqrt{3b-3}+8\sqrt{4c-4}-20$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

***Prof*. Neculai Stanciu**

G:106. Fie ABC un triunghi şi fie [AD] o bisectoare astfel încât la o treime faţă de vârf, prin punctul P de pe bisectoare se duce o paralelă [MN] la [BC]. Din N ∈ [AC] se duce o paralelă la [AB] care intersectează pe [AD] in Q si pe [BC] în R. Dacă AB=18, BC=16 si AC=6, aflaţi perimetrul triunghiului QDR.

***Prof.* Adrian Stan**

G:107. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30^0, lungimea bisectoarei unghiului drept este jumătate din lungimea bisectoarei unghiului de 30^0.

***Prof.* Simion Marin**

G:108. În triunghiul ABC, fie $M \in [AB], N \in [AC]$ astfel încât $MN \| BC$ şi $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$. Dacă $BN \cap CM = \{O\}$ şi aria triunghiului MNO este egală cu **a,** arătaţi că $S_{AMN} = 2a$.

***Prof.* Ion Radu**

G:109. Dacă în exteriorul paralelogramului ABCD se ia un punct E, să se arate că are loc relaţia: $S_{AED} = S_{ABE} + S_{ABC} + S_{ECD}$.

***Prof.* Ion Radu**

Clasa a VIII- a

G:110. Arătaţi că 2009 divide numărul $1^3 + 2^3 + ... + 2008^3$.

***Prof.* Neculai Stanciu**

G:111. Dacă 2a(a-2)+2b(b-4)+10=0, $a, b \in R$, să se calculeze $(a-2)^{2009}+(a+b-4)^{2009}$.

***Prof.* Adrian Stan**

G: 112. Arătaţi că numărul $A=3^{n+2}$-8n-9 este divizibil cu 64 oricare ar fi n, număr natural impar.

***Prof.* Tuţă Luca**

G:113. Să se determine toate funcţiile $f : R \to R$, astfel încât $f(x-5)=1-2f(4)+\frac{x-3}{3}, \forall x \in R.$

***Prof.* Adrian Stan**

G:114. Să se determine max(x+y) ştiind că: $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{x^2+y^2}{xy} = 1007; x, y \in (0,+\infty)$

***Prof.* Ligia Struţu, *prof.* Gheorghe Struţu**

G115. Pătratele ABCD şi ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculaţi măsura unghiului diedru format de planele (MAD) şi (MND).

***Prof.* Tuţă Luca**

G:116. Fie ABCD un tetraedru în care AB=BC=AD=2 cm şi BD=CD=AC=$\sqrt{5}$ cm. Dacă M,N,P,Q,R,T sunt mijloacele muchiilor [AB], [AD], [AC], [DC], [BC] şi respectiv [BD], calculaţi:a)distanţa dintre dreptele AB şi DC;
b) volumul piramidei MNPRT;

Prof. Gheorghe Dârstaru

G:117. Pe planul triunghiului ABC având $m(\hat{A}) = 90^0$, AB=6 cm şi $m(\hat{C}) = 30^0$ se ridică perpendiculara AM. Să se determine lungimea acestei perpendiculare ştiind că măsura unghiului diedru format de planele (MBC) şi (ABC) este de 60^0.

Prof. Simion Marin

G:118. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu AB=1 dm. Alegem punctul M pe dreapta DC(C între D şi M). DC=CM. Fie N intersecţia dintre [MA] şi [BC] iar P este intersecţia dintre [MD'] şi [CC']. Dacă [NP] are valoarea $\frac{\sqrt{2}}{2}$, aflaţi distanţa de la D la planul (AD'M).

Prof. Ion Stănescu

- **LICEU** ***Clasa a IX- a***

L:45. *Fie* $f:N\to R$, astfel încât $f(n+1)=\dfrac{2f(n)+3}{f(n)+3},\forall n\geq 0$; Ştiind că f(0)=1, să se studieze monotonia lui f.

***Prof.* Adrian Stan**

L:46. Se consideră mulţimea $A=\{1;3;6;10;15;21;.....\}$. Să se arate că există $a_1,a_2,a_3,...,a_{2004}\in A$, distincte, astfel încât $a_1+a_2+a_3+.....+a_{2003}=a_{2004}$.

***Prof.* Ştefana – Mirela Ispas**

L:47. Să se rezolve ecuaţia:
$\left[x^{2009}\right]-[2x]-3=\{x\}-4$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x, iar $\{x\}$, partea fracţionară a lui x.

Prof. Adrian Stan

L:48. Un număr pozitiv x satisface relaţia $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Să se demonstreze că numărul $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ este întreg şi să se găsească valoarea sa.

***Prof.* Gabriel Andrei**

L:49. Să se arate că triunghiul dreptunghic ABC($m(\hat{A})=90^0$) are un unghi de 15^0 dacă şi numai dacă $p=(2+\sqrt{6})\cdot h_a$.

***Prof.* Ovidiu Ţâţan, *Prof.* Constantin Apostol**

L:50. Se dă triunghiul ABC. Să se determine punctul P, exterior triunghiului ABC, pentru care patrulaterele concave PABC, PBCA şi PCAB sunt echivalente.

***Prof.* Constantin Apostol**

L:51. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$. Arătaţi că $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\geq\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$

***Prof.* Gabriel Andrei**

L:52. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, să se determine minimul expresiei:

$$E(a,b,c)=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}$$

***Prof.* Gheorghe Struţu, *Prof.* Ligia Struţu**

L:53. Să se rezolve în **R** ecuaţiile :

a) $\left[\dfrac{x+2008}{4}\right]+\left[\dfrac{x+2009}{7}\right]=\dfrac{x}{8}+2010.$ b) $\left[x^2+3x+2010\right]=\dfrac{x}{2}+2009$

***Prof.* Ligia Struţu**

Clasa a X- a

L:54. Să se determine numărul de cifre din care este compus numărul 7^{2009}.

***Prof.* Adrian Stan**

L:55. Să se rezolve ecuaţia: $2009^x-2008^x=3(2008^{\frac{2x}{3}}+2008^{\frac{x}{3}})+1$

***Prof.* Adrian Stan**

L:56. Dacă patru numere complexe distincte au proprietatea că produsul oricăror trei dintre ele este cubul celui de-al patrulea, atunci imaginile lor geometrice sunt vârfurile unui pătrat.

***Prof.* Ştefana – Mirela Ispas**

L:57. Să se compare numerele a şi b unde:
$a=\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+2(\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{3}+\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2})}$ şi $b=\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

***Prof.* Constantin Rusu**

L:58. Fie $f:[0;1]\to R$, o funcţie cu proprietăţile: (i) f(1)=1; (ii) $f(x)\geq 0,\forall x\in[0;1]$; (iii) Dacă x, y şi $x+y\in[0;1], atunci\quad f(x+y)\geq f(x)+f(y)$. Demonstraţi că $f(x)\leq 2x,\forall x\in[0;1]$

***Prof.* Gabriel Andrei**

L:59. *Fie* $x,y,z\in C$ astfel încât $\begin{cases}x+y+z=1\\ xyz=1\\ |x|=|y|=|z|=1\end{cases}$. Să se demonstreze că $\{x,y,z\}=\{1,i,-i\}$

***Prof.* Gabriel Andrei**

Clasa a XI-a

L:60. Să se demonstreze inegalitatea $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\chi\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}, unde\ \alpha,\beta,\chi$ sunt unghiurile interioare unui triunghi.

***Prof.* Constantin Dinu**

L:61. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[2]{1+\sin 2x}+\sqrt[3]{1+\sin 3x}+.....+\sqrt[(n+1)!]{1+\sin(n+1)x}+x-n}{x})$

***Prof.* Constantin Rusu**

L:62. Fie $a\in(0;1)$ un număr real şi $f:\Re\to\Re$, o funcţie cu proprietăţile: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(ax)}{x}=0.$ Să se arate că există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ şi să se calculeze această limită.

***Prof.* Ştefana – Mirela Ispas**

L:63. Calculati: $L(n)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos^2 2x\cos^3 3x.....\cos^n nx}{x^2}$. ***Prof.* Apostol Manuela**

L:64. Să se scrie care este perpendiculara comună a dreptelor date de ecuaţiile:
d_1: x-1=y-2=z-3; d_2: -x-1=-y+2=z ***Prof.* Neculai Stanciu**

Clasa a XII-a

L:65. Fie x_1,x_2,x_3, rădăcinile ecuaţiei $x^3-x^2-2=0$. Să se calculeze: $x_1^5+x_2^5+x_3^5$.

Prof. Gheorghe Dârstaru

L:66. Fie polinomul $P(X)=X^n+2X-1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,...x_n$. Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^2{}_k+1}{x_k-1}$. **Prof. Adrian Stan**

L:67. Să se arate că funcţia $F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2})$ este o primitivă a funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ pe intervalul $(-\pi,\pi)$ şi să se calculeze integrala $I=\int_0^{2\pi}f(x)dx$. Generalizare: determinati o primitivă a funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{2009+\cos x}$ pe intervalul $[0,2\pi]$ si calculaţi integrala $\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}f(x)dx$.

***Prof.* Apostol Manuela**

L:68. Să se arate că există un morfism surjectiv de grupuri $f:Q_+^*\to Q$ între grupurile $(Q_+^*,\cdot)$ şi $(Q,+)$

***Prof.* Ştefana - Mirela Ispas**

6. Caleidoscop matematic

1. DIN FRUMUSEŢILE MATEMATICII

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1234 \times 8 + 4 = 9876$
$12345 \times 8 + 5 = 98765$
$123456 \times 8 + 6 = 987654$
$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$
$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$
$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

$1 \times 9 + 2 = 11$
$12 \times 9 + 3 = 111$
$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1234 \times 9 + 5 = 11111$
$12345 \times 9 + 6 = 111111$
$123456 \times 9 + 7 = 1111111$
$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$
$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$
$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$

$9 \times 9 + 7 = 88$
$98 \times 9 + 6 = 888$
$987 \times 9 + 5 = 8888$
$9876 \times 9 + 4 = 88888$
$98765 \times 9 + 3 = 888888$
$987654 \times 9 + 2 = 8888888$
$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$
$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$

2. ELEFANTUL ŞI ŢÂNŢARUL

Un amator de distracţii matematice, făcând diferite transformări ale expresiilor algebrice, a ajuns la concluzia ciudată că greutatea unui elefant este egală cu greutatea unui ţânţar. El a raţionat în felul următor: Fie x greutatea elefantului şi y greutatea ţânţarului. Notăm cu 2v suma dintre x şi y. Aşadar, $x+y=2v$. Din aceasta putem obţine : $x-2v=-y$ şi $x=-y+2v$. Să înmulţim acum termenii din stânga ai egalităţilor între ei şi cei din dreapta între ei. Rezultă: $x^2-2vx=y^2-2vy$. Adunând la ambii membri ai acestei egalităţi v^2, vom obţine:
$x^2-2vx+v^2=y^2-2vy+v^2$, sau altfel scris, $(x-v)^2=(y-v)^2$. Extrăgând rădăcina pătrată din ambii membri ai ultimei egalităţi, vom obţine: $x-v=y-v$, rezultând în final că $x=y$, adică greutatea elefantului este egală cu greutatea ţânţarului.

Puteţi spune unde s-a greşit ?

(după cartea MATEMATICI K-N POVEŞTI, de ANA PANAITESCU)

Soluţie: S-a greşit la extragerea rădăcinii pătrate din membrii egalităţii $(x-v)^2=(y-v)^2$, rezultatul fiind $|x-v|=|y-v|$, egalitatea $x-v=y-v$ este falsă întrucât $x-v\rangle 0, y-v\langle 0$, aşadar un număr pozitiv nu poate fi egal cu un număr negativ.

3. CĂŢI NEPOŢI AM?

Bunica, Buclucaşa Lucica, are trei copii şi mai mulţi nepoţi. Fiind întrebată de un vecin câţi nepoţi are mai exact, ea spune:
- Îi poţi afla şi singur din cele ce-ţi voi spune.
- Dacă înmulţesc numărul nepoţilor de la primul copil cu doi şi adun trei, apoi înmulţesc rezultatul cu cinci după care adaug şi numărul nepoţilor de la al doilea copil obţin un rezultat pe care-l înmulţesc cu zece. La acesta adaug numărul nepoţilor de la a treilea copil şi scăzând în final numărul 150 obţin 546.
- Ei, câţi nepoţi am?

După un timp de gândire, vecinul a putut da răspunsul corect, şi anume 15 nepoţi. Cum a procedat?

(N.R)

7. *Poşta redacţiei*

*D*ragi cititori, elevi şi profesori, a apărut al treilea număr al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, din judeţul Buzău şi nu numai, pentru a face din obiectul matematicii o activitate performantă.

*P*rofesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa redacţiei **Şcoala cu clasele I-VIII, POTOCENI, Com. MĂRĂCINENI, Jud. BUZĂU**, **Str. Centrală, nr. 107, Cod: 127327; Tel. 0238556431**, cu menţiunea Pentru revista de matematică „SCLIPIREA MINTII” . De asemenea se pot trimite pe adresa de mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(Word 2003) , fie scrise de mână şi scanate.
Informaţii suplimentare se pot obţine la adresa de mail de mai sus sau vizitând pagina Web: **www.sclipireamintii.info;**

*E*levii care doresc să trimită rezolvările problemelor trebuie să ia legătura cu profesorii lor şi să respecte condiţiile ca fiecare problemă să fie rezolvată pe o singură foaie cu specificarea numărului problemei, şi a autorului ei, iar la sfârşitul soluţiei să-şi treacă numele şi prenumele, clasa şi profesorul său, şcoala şi localitatea.(Indicativele **P, G** şi **L** sunt pentru diferenţierea pe invăţământ primar, gimnazial respectiv liceal) Fiecare elev poate rezolva şi trimite problemele destinate clasei în care se află şi pe cele ale ultimelor două clase imediat inferioare precum şi pe cele din clasele superioare. Fiecare rezolvare corectă şi completă se va nota cu un punct iar elevii cu cele mai mari punctaje vor fi menţionaţi în revistă, urmând să fie premiaţi cu diplome şi cărţi.

*F*acem pe această cale o invitaţie către toţi profesorii de matematică care apar în revistă, de a sprijinii şi promova în continuare revista în rândul elevilor, menţionând că începând cu numărul 4, revista va avea colaboratori şi în celelalte judeţe.

*D*ata finală până când profesorii şi elevii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru numărul 4 al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Octombrie 2009**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Redacţia

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 8, “ Valeriu Sterian”Rm. Sărat:
Clasa a VI-a: Alecu Cristian(11), Dumitru Dragoş(11), David Alexandra(10), Ionescu Cătălin(10), Dinică Mariana(10), Ion Adina(9), Stoian Ionela(9), Gheorghe Denisa(8), Necula Cătălina(8), Preda Gabriela(8), Dobroiu Nadia(8);
Clasa a VII-a: Aktug Nebahad(14), Untea Alice(14)**, Prof Panaitescu Ana.**

Şcoala cu clasele I-VIII, Florica:
Clasa a VII-a: Aldea Gabriel(10), **Clasa a VIII-**a: Negoiță Daniel(12), **Prof. Ignătescu Viorel.**

Şcoala Berca(Grup Şcolar Tehnologic „ Sf. Mc. Sava”):
Clasa a III-a: Marcu Alexandra, Şomoiag Andreea, Alexe Rareş,**Înv. Ene Rodica**;
Dogaru Ioana; Iordache Ciprian, Nistor Răzvan, Dobrin Mihăiță, Neagu Gina, Avram Alexandru, **Înv. Vrabie Marioara;** Tudor Alexandru, Boriceanu Bogdan, Andronache Lorena, Popa Mihaela, **Înv. Marchidanu Florica;**

Clasa a IV-a : Bălălău Bogdan,Oancea Andreea, **Înv. Ion Daniela;** Neacşu Teodor, Dascălu Andreea, Vlad Mădălin, Pascu Bianca, Ţiboacă Doina, Neagu Cezar, Bratu Raluca, Bahudu Roxana, **Înv. Avrigeanu Felicia.**

Vasile Nichi, Panaete Alexandra, Dinu Andrei, Alecsandrescu Daniel, Leiţoiu Elena, Olaru Cosmin, Leiţoiu Adrian,Zidaru Maria, **Înv. Anton Maria.**

Clasa a V-a: Oprea Andreea Bianca(12), Dumitrescu Sânziana Ioana(11), Grama Florin(11), Păpătoiu Gabriel(11);**Prof. Lupşan Rodica.**

Clasa a VI-a: Şoigan Mihaela(15), Radu Alexandru(14), Gheorghe Valentin(13), Dragomir Andreea(13), Dogaru Dorina(13), **Prof. Lupşan Rodica,** Dodan Anca(12), Dinu Cristian(12), Şeremet Alin(12), **prof. Berca Vasile**;

Clasa a VII-a: Dragomir Florin(16), Neagu Ancuţa(16), Popa Andreea(16), Castravete Miruna(16), Minea Elena(15), Anton George(15), Dogaru Iulian(15), Stoica Petruţ(14), Banu Bianca(14), Coman Eleonora(14), Tănase Bianca(14), Barchizeanu Andra(14), Chivu Adrian(13), Ilie Cristian(12), Jupoiu Marian(12), Constantin Răzvan(12), Iordache Răzvan(12), Prună Iulian(12), Huchiu Roxana(12), Budui Andreea(12), Câmpeanu Cosmin(11), Şerbănescu Valentin(11), **Prof. Stanciu Neculai,** Dodan Bogdan(14), **prof. Berca Vasile.**

Clasa a VIII-a: Mezei Raluca(13), Şolea Mirela(13) **,** Preda Ruxandra (12)**,** Jipa Iohana(11)**,** Păpătoiu Andrei(11), **Prof Lupşan Rodica**; Vlad Alexandru(13), Croitoru Victor(13), Marin Florina(13), Tudora Mădălina(13), Pavel Alexandru(10), Cojocaru Tatiana(10), Palcău Cristina(10), Popa Ana Maria(10), Vasile Cosmina(9), Vrabie Lucian(9), Bundă Rareş(8), **Prof. Stanciu Neculai.**

Scoala cu clasele I-VIII, Pleşcoi, Berca: clasa a III-a: Ciocan Oana, Moldoveanu Teodora, Ţâru Luiza, Vlad Andrei, Vlad Anca**, Înv. Lupşan Ion.**

Şcoala cu clasele I-VIII, Potoceni:

Clasa a V-a: Roşu Laurenţiu(13), Cîmpeanu Andreea(13), Luntraru Denisa(10), Necula Elena(9), Păduraru Alexandra(9), Scîntei Bianca(9), Ralea Ştefănuţ(8), Sava Cristian(7),Vlăgea Adrian(6),Trandafir Andrei(6), Şenchiu Adrian(6), Caloian Bogdan(5), Vişteanu Marian(5).

Clasa a VI-a: Câmpeanu Iulian(14), Soare Georgiana(13), Popescu Mirela(13), Sava Ionuţ(12), Manole Marius(10); Ciocan Irina(9), Tudose Ana Maria(9), Cucu Răzvan(7), Vlăgea Ionuţ(6), Popescu Mădălina(6), Damian Cătălin(5), Zaharia Paul(5),Cucu Răzvan(5) Trentea Daniel(5), Ştefan Răzvan(5);

Clasa a VII-a: Bogdan Oana(8); Ilie Denis(8), Gembăşel Florica(7), Mihalcea Cătălin(7), Constantin Florin(7), Stan Anton(6), Văleanu Nicolaie(5);Potec Florentina(3);

Clasa a VIII-a: Ungureanu Liviu(16), Cîmpeanu Ion(16), Naftan Cristina(13), Tudorie Anca(12), Brezeanu Ioana(12), Moraru Cristian(12), Gembăsel Valerică(11), Bărbunea Mirela(11), Albu Florin(10), Roşu Gabriel(7), Mihai Maria(7), Ulmeanu Oana(7),Tatu Daniel(5),**Prof. Stan Adrian.**

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni:

Clasa a V-a: Scarlat Roxana (10), Vasile Georgiana (8), Minea Diana (8), Popa Ramon (8), Velicu Gabriel (8);

Clasa a VI-a: Dragomir Alexandru (11), Cristea Maria (10), Bârzoi Mădălina (9), Chivu Georgiana (9), Stanciu Simona (9);

Clasa a VII-a: Buzatu Camelia (10), Dumitru Cristina (8), Marin Ana (8), Radu Laura (7);

Clasa a VIII-a: Cristescu Lavinia (10), Apostol Alina (9), Luca Ciprian (8), Bratu Ioana (8), Simion Alin (8);**Prof. Stănescu Ion.**

Scoala cu clasele I-VIII Valea Părului, Com. Beceni:

Clasa: a V-a: Sandu Elena Mădălina(11), Nae Alina Elena(10), Ungureanu Alexandru(10), Dinu Marina(9), **Prof. Dârstaru Gheorghe.**

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Nehoiu:

Clasa a V-a: Bucur Ştefan, Irimia Mălina, **Prof. Prefac Vasile**, Petre Andreea, Popescu Andreea, Răduca Bogdan, Răduca Diana, Tătulescu Ana Maria, **Prof. Prefac Maritanţa;**

Clasa a VI-a: Băcescu Alexandru, Blidaru Maria, Despescu Ana- Maria, Dimian Cosmin, Neagu Cătălin, Prof. Prefac Vasile, Beteringhe Andreea, Damian Cosmin, Tudor Aura, Mihalcea Georgiana, **Prof. Prefac Maritanţa**;

Clasa a VII-a: Blidaru Eduard, Ilie Ştefania, Ion Victor, Mircică Maria, Petre Antonia, Stan Andreea, Tarău Ionuţ, **Prof. Prefac Vasile**, Avrămescu Mariana, Beteringhe Elena, Răduca George, Neaga Roxana, **Prof. Prefac Maritanţa**.

“Wagner : Ah, Doamne cât de lungă-i arta
Şi cât de scurtă-i viaţa!
Lucid cum sunt am multe griji,
Mă copleşeste ceaţa.
Cât de anevoie se găseşte calea
Ce duce la izvoare.
Şi încă n-a făcut pe jumătate drumul,
Că bietul om, dispare, moare...
Lumea, inima şi spiritul
Oricine ar dori să le cunoască.

Faust : Să le cunoască? Să le dea de rost?
Cunoaşterea! Ce nume poartă
Ăst prunc şi unde mi-i?
Puţinii care-au cunoscut ceva şi-au fost
Destul de deşucheaţi ca să o spună,
Descoperindu-şi gândul şi simţirea,
Au fost sau răstigniţi sau arşi de vii...

Wagner : Ce bucuros aş fi vegheat, ca să discut
Despre savante lucruri neîntrerupt...
Mi-am închinat ştiinţei, studiilor, zelul viu.
Cunosc ce-i drept atâtea, dar aş voi pe toate să le ştiu.

Faust : Ciudat că numai capul
Speranţa nu şi-o pierde,
Aleargă după găunoase fleacuri,
Cu o mână sapă căutând comori de veacuri
Şi-i fericit când râme în gunoi găseşte”

GOETHE, FAUST, I