REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

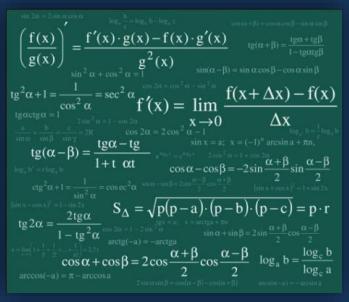
ISSN 2065-6432 - IANUARIE 2016

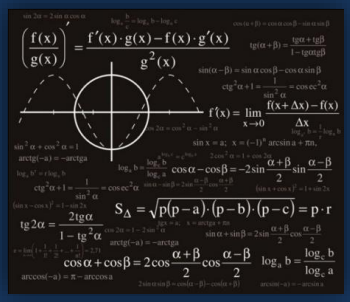
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

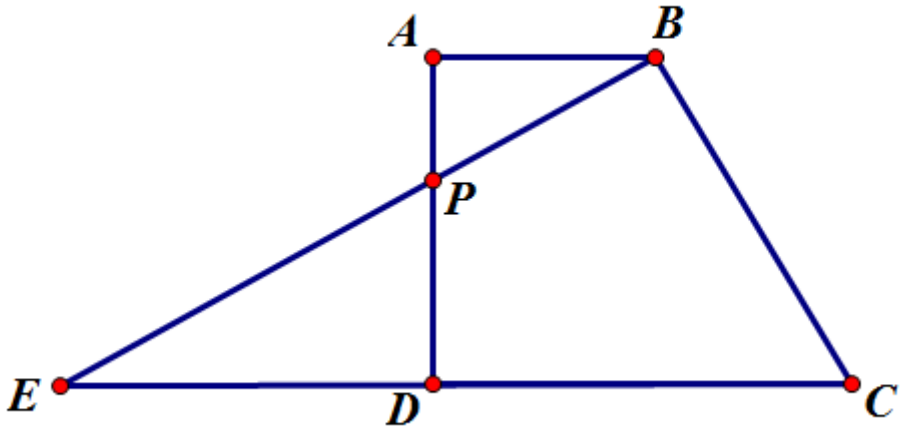
1. **Metode de rezolvare a unei probleme de minim …pag. 2**
   George-Florin Șerban
2. **Câteva aplicaţii ale şirurilor recurente la integrale …pag. 4**
   Stoica Alina Codruta
3. **Inegalitatea lui Karamata…pag.9**
   Sebastian Petrișor Ilinca
4. **Soluţii pentru unele probleme din revista Mathematical Reflections…pag.12**
   Nela Ciceu şi Roxana Mihaela Stanciu
5. **Problema biliardului …pag.17**
   Andrei Octavian Dobre
6. **Problema lunii DECEMBRIE 2015 - Metode interesante de rezolvare …pag.20**
   Constantin Telteu, George Florin Șerban, Nela Ciceu, Roxana Mihaela Stanciu, Radu Laura, Oláh Csaba, Bianca Veronica Avram
7. **O problemă de geometrie în spațiu cu mai multe soluții ...pag.30**
   Constantin Telteu, Cristi Alexandru Vasile, Biro Istvan, Gheorghe Rotariu, Oláh Csaba
8. **CONCURS - Problema lunii IANUARIE 2016 … pag.38**
   Propusă spre rezolvare de Andrei Octavian Dobre

1. Metode de rezolvare a unei probleme de minim

Prof. George-Florin Șerban ,
Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" , Brăila

Voi prezenta trei metode de rezolvare pentru problema :

E:14791 .Fie ABCD un trapez dreptunghic cu $m(\measuredangle A) = m(\measuredangle D) = 90^0$ si P un punct variabil pe [AD] . Aratati ca suma PB+PC este minima daca si numai daca $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD}$. **G.M.B Nr 2 \ 2015 , Ion Voicu , Radulesti , Ialomita**



Metoda 1 (geometrica) . Fie punctul E simetricul punctului C fata de punctul D .

In triunghiul ΔPCE , [PD] mediatoare deci PC=PE . Rezulta $PB + PC = PB + PE \geq BE$. Minimul lui PB+PC se atinge cand punctele B,P,E coliniare. Deci $\Delta ABP \sim \Delta PDE$, $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{CD}$.

Metoda 2 (algebrica) . Folosesc inegalitatea lui Minkowski

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, egalitatea are loc daca $a \cdot d = b \cdot c$.

Notam AB=b , CD=B , AD=h si AP=x . In triunghiul ΔBAP , dreptunghic , aplic teorema lui Pitagora , $BP=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{x^2+b^2}$. In triunghiul ΔPDC , dreptunghic , aplic teorema lui Pitagora , $PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{(h-x)^2+B^2}$.

$PB+PC=\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(h-x)^2+B^2}\geq\sqrt{(x+h-x)^2+(b+B)^2}=\sqrt{h^2+(b+B)^2}$ constant.

Minimul se atinge daca $\frac{x}{h-x}=\frac{b}{B}$, $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{CD}$ (am folosit inegalitatea lui Minkowski) .

Metoda 3 (analiza matematica) . Notez AP=x , variabil . Fie functia $f:[0,h]\to R_+$, $f(x)=PB+PC=\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(h-x)^2+B^2}$. Calculez derivata functiei f , $f^{|}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+B^2}}$. Aflam punctele critice rezolvand ecuatia $f^{|}(x)=0$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}=\frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+B^2}}$, ridicam la patrat in ambii membri si obtinem $x^2\cdot(h-x)^2+x^2\cdot B^2=x^2\cdot(h-x)^2+b^2\cdot(h-x)^2$, $x^2\cdot B^2=b^2\cdot(h-x)^2$,

$x\cdot B>0$, $b\cdot(h-x)>0$, $x\cdot B=b\cdot(h-x)$ adica $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{CD}$. Obtinem $x_0=\frac{b\cdot h}{B+b}$.

Functia f este continua pe [0,h] , $f^{|}(0)=\frac{-h}{\sqrt{h^2+B^2}}<0$, $f^{|}(h)=\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}>0$. Atunci punctul $P(x_0,f(x_0))$ este punct de minim .

x	0	x_0	h
$f^{|}(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + + + + + +
f(x)	↘ ↘ ↘ ↘ ↘	$f(x_0)$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

$f(x)=\text{PB+ PC}\geq f(x_0)=\sqrt{(\frac{b\cdot h}{B+b})^2+b^2}+\sqrt{(h-\frac{b\cdot h}{B+b})^2+B^2}=\sqrt{h^2+(b+B)^2}$.

Bibliografie: Gazeta Matematica Nr 3 \ 2015 .

2. Câteva aplicaţii ale şirurilor recurente la integrale

Prof. Stoica Alina Codruta
Colegiul Naţional "I.C.Bratianu " Hateg, judeţul Hunedoara

1. Pentru $n\in\mathbb{N}$ se definesc funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x}{e^{2^n\cdot x}}$. Fie $I_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)dx$

a) Să se calculeze I_0 .

b) Să se verifice relaţia $f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}f_n(2x),\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Să se arate că $I_{n+1}=\frac{1}{4}I_n,\forall n\in\mathbb{N}$

d) Determinaţi termenul general al şirului $S_n=I_0+I_1+I_2+...+I_n$ şi calculaţi limita sa.

Soluţie:

$a)I_0=\int_0^1\frac{x}{e^x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{2}{e}$

$b)\quad \frac{1}{2}f_n(2x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{e^{2^{n+1}x}}=f_{n+1}(x)$

$c)\quad I_{n+1}=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} f_{n+1}(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} xe^{-2^{n+1}x}dx.$

Făcând schimbarea de variabilă $t=2x$ rezultă $dt=2dx$ şi $t\in[0,\frac{1}{2^n}]$ implică

$\int_0^{\frac{1}{2^n}}\frac{t}{2}e^{-2^n t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\frac{t}{2e^{2^n t}}\cdot dt=\frac{1}{4}I_n,\forall n\in\mathbb{N}$

$d)$Din $I_{n+1}=\frac{1}{4}I_n,\forall n\in\mathbb{N}$ rezultă $\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{1}{4},\forall n\in\mathbb{N}$, deci $(I_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţia $\frac{1}{4}$ şi primul termen I_0 . Ţinând cont de relaţia de recurenţă obţinem $I_{n+1}=\frac{1}{4}I_n,\forall n\in\mathbb{N}$ şi avem: $S_n=I_0+\frac{1}{4}I_0+\left(\frac{1}{4}\right)^2 I_0+...+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}I_0=I_0\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+...+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)=$

$$= I_0 \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} I_0 \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right], \text{de unde } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3} I_0 = \frac{4}{3}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$ si şirul $(I_n)_{n\in N}$, definit astfel $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0, I_1.

b) Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n = \frac{1}{n+1}$

c) Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\le I_n$

d) Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ au loc inegalităţile $10I_{n+2}\le\frac{1}{n+1}\le 10I_n$

e) Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ au loc inegalităţile $\frac{1}{10(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{10(n-1)}$

f) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} nI_n = f(1)$

Soluţie

$a)$ $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ deci $I_0=\int_0^1\frac{1}{(x+2)^2+1}dx$

$$\int\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+1}dx=arctg\varphi(x)=arctg(x+2)$$

$$I_0=arctg(x+2)\Big|_0^1=arctg3-arctg2$$

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx-2\int_0^1\frac{x}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)\Big|_0^1-2I_0=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-2arctg3+2arctg2.$$

$$b)I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+4x+5}dx+4\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+4x+5}dx+5\int_0^1\frac{x^n}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{x^{n+2}+4x^{n+1}+5x^n}{x^2+4x+5}dx=\int_0^1\frac{x^n(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$c) I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+4x+5}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+4x+5}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+4x+5}dx.$

Deoarece $x^2+4x+5 \geq 0$ şi $x^n \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$ rezultă $x-1 \leq 0,$

deci $\frac{x^n(x-1)}{x^2+4x+5} \leq 0 \ \forall x \in [0,1]$ adică

$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+4x+5}dx \leq 0$ deci $I_{n+1} - I_n \leq 0$ de unde $I_{n+1} \leq I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

d) Ţinând cont de c) are loc $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \forall n \in \mathbb{N}^*$

adică , $4I_{n+1} \leq 4I_n$, $5I_n = 5I_n$.

Adunând membru cu membru se obţine: $10I_{n+2} \leq I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n \leq 10I_n$.

Din b) rezultă că $10I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 10I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$e)$ Din $d)$ avem $10I_n \geq \frac{1}{n+1}$ adică $I_n \geq \frac{1}{10(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

iar din $10I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ pentru $n \geq 2$ are loc $I_n \leq \frac{1}{10(n-1)} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq 2$

$\frac{1}{10(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n-1)}$ deci $\frac{n}{10(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{10(n-1)}$ şi conform criteriului cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{10} = f(1).$

3. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx.$

a) Să se calculeze I_1 şi I_3.

b) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c) Să se arate că $I_n + I_{n+4} = \frac{1}{n+1}$.

d) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx.$

e) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \right)$.

f) Să se demonstreze inegalitatea $e \leq \lim_{n\to\infty} \left((2n+4) \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \right)^n \leq e^5$.

Rezolvare:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx = \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}dx = \left(\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\ln 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^4+1}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x-1\right)}{x^4+1}dx \le 0 \Rightarrow$

şirul $\left(I_n\right)_{n\ge 1}$ este descrescător.

c) $I_n + I_{n+4} = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+4}}{x^4+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x^4+1\right)}{x^4+1}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

d) Deoarece $x^n \ge 0,\ \forall x \in [0,1]$ şi $x^4+1 \ge 1,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$0 \le \frac{x^n}{x^4+1} \le x^n, \forall x \in [0,1] \overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\Rightarrow} 0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$0 \le \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx = 0$.

e) Deoarece $\left(I_n\right)_{n\ge 1}$ este descrescător $\rightarrow I_n \ge I_{n+4} \rightarrow$ $\rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 2I_n \ge I_n + I_{n+4} \\ \text{Dar} \quad I_n + I_{n+4} = \frac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow I_n \ge \frac{1}{2n+2}$. (1)

Din $I_n \ge I_{n+4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2I_{n+4} \le I_n + I_{n+4} \\ \text{Dar} \quad I_n + I_{n+4} = \frac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow I_{n+4} \le \frac{1}{2n+2},\ \forall n \in N^* \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n \le \frac{1}{2n-6},\ \forall n \in N^*,\ n \ge 5$.(2)

Din inegalităţile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{n}{2n+2} \le nI_n \le \frac{n}{2n-6}, \forall n \in N^*, n \ge 5$ prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty}\left(nI_n\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx\right) = \frac{1}{2}$.

g) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{1}{2n+2} \le I_n \le \frac{1}{2n-6},\ \forall n \in N^*, n \ge 5 \Rightarrow$$

$$1 \le \frac{2n+4}{2n+2} \le (2n+4)\cdot I_n \le \frac{2n+4}{2n-6}, \forall n \in N^*, n \ge 5 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \le ((2n+4)\cdot I_n)^n \le \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n, \forall n \in N^*, n \ge 5 \overset{\text{prin trecere la limita}}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}((2n+4)\cdot I_n)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^n \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} \le \lim_{n\to\infty}((2n+4)\cdot I_n)^n \le \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{5}}\right]^{\frac{5n}{n-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e \le \lim_{n\to\infty}\left((2n+4)\cdot\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx\right)^n \le e^5.$$

3. Inegalitatea lui Karamata

Prof. Sebastian Petrișor Ilinca ,
Școala Gimnazială Pîrșcoveni

Spunem că vectorul $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ *majorează* vectorul $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ dacă:

1. $x_1\geq x_2\geq...\geq x_n,\ \ y_1\geq y_2\geq...\geq y_n,$
2. $x_1+x_2+...+x_k\geq y_1+y_2+...+y_k,\ \ k=\overline{1,n-1},$
3. $x_1+x_2+...+x_n=y_1+y_2+...+y_n.$

Teoremă(Karamata): Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie convexă. Dacă $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ majorează $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $x_i\in[a,b], y_i\in[a,b], i,j\in\overline{1,n}$, atunci

$$f(x_1)+f(x_2)+...f(x_n)\geq f(y_1)+f(y_2)+...f(y_n).$$

De exemplu: Funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R,\ f(x)=-\cos x$ este convexă pe domeniul de definiţie. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC. Atunci, vectorul $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$ majorează (A,B,C). Aplicând teorema anterioară se obţine $\cos A+\cos B+\cos C\geq\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0=1$

Aplicaţii: 1) Fie n număr natural , $n\geq 2$. Determinaţi constanta c astfel încât $\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\left(x_i^{\,2}+x_j^{\,2}\right)\leq c\left(\sum_{1\leq i\leq n}x_i\right)^4$, pentru $x_1,x_2,...,x_n\geq 0$ numere reale.

Soluţie: Prin normalizare se obţine $\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\left(x_i^{\,2}+x_j^{\,2}\right)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i),$ cu $f(x)=x^3-x^4,\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$

Se constată că funcţia este convexă. Deoarece inegalitatea este simetrică putem presupune fără a restrânge generalitatea $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$. Dacă $x_1 \geq \frac{1}{2}$ vectorul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0\right)$ majorează vectorul $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Aplicând teorema Karamata avem : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + ... + f(0) = \frac{1}{8}$.

Dacă $x_1 \geq \frac{1}{2}$, scriind $x_1 = \frac{1}{2} - c,\ c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ obţinem vectorul $(1 - x_1, 0, ..., 0)$ care majorează $(x_2, ..., x_n)$ şi astfel $\sum_{i=2}^{n} f(x_i) \leq f(1 - x_1) + f(0) + ... f(0) = f(1 - x)$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f(x_1) + f(1 - x_1) = x_1(1 - x_1)\left[x_1^{\,2} + (1 - x_1)^2\right] = \left(\frac{1}{4} - c\right)^2\left(\frac{1}{2} + 2c\right) = 2\left(\frac{1}{16} - c^4\right) \leq \frac{1}{8}.$$

2) Arătaţi că $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$, oricare ar fi a, b, c numere reale pozitive.

Soluţie: Presupunem că $a \geq b \geq c$, adică secvenţa (a, b, c) este descrescătoare. Atunci $(2a, 2b, 2c)$ majorează $(a + b,\ b + c,\ c + a)$ şi aplicând inegalitatea lui Karamata funcţiei convexe $f(x) = \frac{1}{x}$ pe $(0, \infty)$ se obţine inegalitatea.

3)(Inegalitatea lui Schur): Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătati că

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$

Soluţie: Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune fără a reduce generalitatea că $a \geq b \geq c$.

Cu substituţia $x = \ln a,\ y = \ln b,\ z = \ln c$ inegalitatea devine

$e^{3x} + e^{3y} + e^{3z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} \geq e^{2x+y} + e^{2x+z} + e^{2y+x} + e^{2y+z} + e^{2y+x} + e^{2z+y}$.

Funcţia $f(x) = e^x$ este convexă pe mulţimea numerelor reale, aplicăm inegalitatea lui Karamta secvenţelor

$a = (3x, 3y, 3z, x + y + z, x + y + z, x + y + z),\ b = (2x + y, 2x + z, 2y + z, 2z + x, 2z + y)$. Din

$a \geq b \geq c$ rezultă că $x \geq y \geq z$ şi evident $3x \geq x+y+z \geq 3z$. Dacă $x+y+z \geq 3y$ (analog $3y \geq x+y+z$) obţinem $3x \geq x+y+z \geq 3z, 2x+y \geq 2y+z \geq 2y+x \geq 2z+x \geq 2y+z \geq 2z+y.$

4) Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale pozitive. Arătaţi că $\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+...+\frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$.

Soluţie: Facem substituţia $x_i = \ln a_i$, $i=\overline{1,n}$. Inegalitatea se rescrie:

$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+...+e^{3x_n-x_1} \geq e^{2x_1}+e^{2x_2}+...+e^{2x_n}$. Considerăm secvenţele

$a=(3x_1-x_2, 3x_2-x_3, ..., 3x_n-x_1)$, $b=(2x_1, 2x_2, v..., 2x_n)$ şi arătăm că a majorează b.

Presupunem că

$3x_{m1}-x_{m1+1} \geq 3x_{m2}-x_{m2+1} \geq ... \geq 3x_{mn}-x_{mn-1}$, $2x_{k1} \geq 2x_{k2} \geq ... \geq 2x_{kn}$, $mi, ki \in \{1,2,..., n\}$

$3x_{m1}-x_{m1+1} \geq 3x_{k1}-x_{k1+1} \geq 2x_{k1}$

$(3x_{m1}-x_{m1+1})+(3x_{m2}-x_{m2+1}) \geq (3x_{k1}-x_{k1+1})+(3x_{k2}-x_{k2+1}) \geq 2x_{k1}+2x_{k2}$

Analog verificăm şi celelalte condiţii. În final aplicăm inegalitatea lui Karamta funcţiei convexe $f: R \to R$, $f(x)=e^x$.

5) Dacă $-1 \leq a, b, c \leq 1$, $a+b+c=-\frac{1}{2}$, arătaţi că $a^4+b^4+c^4 \leq \frac{33}{16}$.

Soluţie: Fie $f:[-1,1] \to R$, $f(x)=x^4$. f strict convexă. Presupunem că $1 \geq a \geq b \geq c \geq -1$ şi din $a+b+c=-\frac{1}{2}$ rezultă că $\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$ majorează (a,b,c). Prin aplicarea inegalităţii lui Karamta rezultă: $a^4+b^4+c^4 = f(a)+f(b)+f(c) \leq f(1)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1) = 2+\frac{1}{16}=\frac{33}{16}$.

Egalitatea are loc când $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-1$.

Bibliografie :

1. Rădulescu V, T.Rădulescu : Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis, Springer, New York, 2009
2. Can, Vo Quoc Ba,. Pohoaţă C. : *Old & New Inequalities (vol 2)*, Editura GIL, 2008
3. Drimbe M. O. : *Inegalităţi idei şi metode*, Editura GIL, 2003

4. Soluţii pentru unele probleme din revista Mathematical Reflections

Prof. Nela Ciceu şi prof. Roxana Mihaela Stanciu

O331. Let ABC be a triangle, let m_a, m_b, m_c be the lengths of its medians, and let p_0 be the semiperimeter of its orthic triangle. Prove that

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\le\frac{3\sqrt{3}}{2p_0}.$$

Proposed by Mircea Lascu, Zalau, Romania

Soluţie:

Folosim notaţiile obişnuite în triunghi, iar F este aria triunghiului ABC.

Deoarece $m_a\ge\sqrt{s(s-a)}$ **, aplicând inegalitatea mediilor obţinem:**

$$\frac{1}{m_a}\le\frac{1}{\sqrt{s(s-a)}}=\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{F}\le\frac{s-b+s-c}{2F}=\frac{a}{2F}\ .$$

Pe de alt[parte, cum laturile triunghiului ortic sunt acosA, bcosB, ccosC, avem

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=$$

$$\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}=$$

$$\frac{16F^2}{8FR}=\frac{2F}{R}.$$

Rămâne de demonstrat că $\frac{a+b+c}{2F}\le\frac{3\sqrt{3}R}{2F}\Leftrightarrow a+b+c\le3\sqrt{3}R$ **care este cunoscută (itemul 5.4 din Bottema).**

S332. Prove that in any triangle with side lengths a, b, c and median lengths m_a, m_b, m_c,

$$4(m_a + m_b + m_c) \leq \sqrt{8a^2 + (b+c)^2} + \sqrt{8b^2 + (c+a)^2} + \sqrt{8c^2 + (a+b)^2}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Soluţie:

Prin ridicare la pătrat obținem:

$$\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} + \sqrt{2a^2+2b^2-c^2} \leqslant \sqrt{8a^2+(b+c)^2}$$
$$\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2+2\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)} \leqslant 8a^2+b^2+c^2+2bc$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)} \leqslant 2a^2+bc$$
$$\Leftrightarrow 4a^4-2b^4-2c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+5b^2c^2 \leqslant 4a^4+4a^2bc+b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow b^4+c^4-2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-2bc) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (b-c)^2(b+c+a)(b+c-a) \geqslant 0.$$

Scriind încă două inegalități similare, prin adunare, rezultă inegalitatea dorită.

J333. Consider an equiangular hexagon $ABCDEF$. Prove that

$$AC^2 + CE^2 + EA^2 = BD^2 + DF^2 + FB^2.$$

Proposed by Nairi Sedrakyan, Armenia

Soluţie:

Notăm a=AB, b=BC, c=CD, d=DE, e=$\bar{E}\bar{F}$, f=FA. Dreapta AF intersecteaza dreapta BC în punctul F', iar dreapta AB intersecteaza dreapta FE în punctul B'.

Deoarece unghiurile hexagonului sunt 120^0, rezultă că triunghiurile ABF' și AFB' sunt echilaterale. De asemenea, avem BC || EF. Înălțimea din A a triunghiului ABC este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, iar înălțimea din A a triunghiului AFE este $\frac{f\sqrt{3}}{2}$.

Deducem că a+f=c+d și analog b+c=e+f (1)

Calculăm ariile triunghiurilor ACE și BDF:

$$[ACE] = [F'CEF] - [F'CA] - [AEF] = \frac{(a+b+e)(a+f)\sqrt{3}}{4} - \frac{(a+b)a\sqrt{3}}{4} - \frac{ef\sqrt{3}}{4} = \frac{(ae+af+bf)\sqrt{3}}{4}$$

și analog $[BDF]=\frac{(bf+ab+ac)\sqrt{3}}{4}$.

Ținând cont de (1), rezultă că [ACE]=[BDF]. (2)

Aplicând teorema cosinusului, obținem:

$AC^2 + CE^2 + EA^2 = BD^2 + DF^2 + FB^2$

<=> $a^2+b^2+ab+c^2+d^2+cd+e^2+f^2+ef = b^2+c^2+bc+d^2+e^2+de+f^2+a^2+af$

<=> ab+de+ef = bc+de+af <=> [ABC]+[CDE]+[EFA] = [BCD]+[DEF]+[FAB]

<=> [ACE]=[BDF], care este exact relația (2).

S335. Let ABC be a triangle. Let D be a point on the ray BA, which is not on the side AB, and let E be a point on the side AC, which is different from A And C. Let X be the reflection of D with respect to B and let Y be the reflection of E with respect to C. Suppose $4BC^2+DE^2=XY^2$. Prove that $BE \perp CD$ if and only if $\angle BAC = 90^\circ$.

Proposed by İlker Can Çiçek, Instanbul, Turkey

Soluţie:

Notând x=BX, y=CY, avem DA=x-c, AT=b-x. Aplicând teoremna cosinusului, obținem

$4BC^2+DE^2=XY^2$ <=> $4a^2+(b-y)^2+2(b-y)(x-c)\cos A = (x+c)^2+(b+y)^2-2(x+c)(b+y)$

<=> $(bx+cy)\cos A = by+cx-a^2$.

Fie M intersecția dintre DE și BC. Folosind teorema lui Menelaus deducem

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{EA}=1\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{x(b-y)}{y(x-c)}\Rightarrow MB=\frac{ax(b-y)}{bx-cy}, MC=\frac{ay(x-c)}{bx-cy}.$$

Putem scrie

$$DM\perp BC\Leftrightarrow DB^2-DC^2=MB^2-MC^2\Leftrightarrow x^2-x^2-a^2+2ax\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2(bx+cy-2xy)}{bx-cy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-a^2c+a^2x+c^2x-b^2x}{c}=\frac{a^2(-bx+cy+2bx-2xy)}{bx-cy}$$

$$\Leftrightarrow bc(cx+by-a^2)+bx(a^2-b^2)+cy(a^2-c^2)-a^2bc=0$$

$$\Leftrightarrow bc(cx+by-a^2)+bx(c^2-2bc\cos A)+cy(b^2-2bc\cos A)-a^2bc=0$$

$$\Leftrightarrow (bx+cy)\cos A=cx+by-a^2.$$

Rezultă că în condiția din enunț, DE este înălțime în triunghiul DBC. Acum concluzia este evidentă: dacă CA este înălțime, atunci E este ortocentrul triunghiului DBC, deci și BE este înălțime. Același raționament pentru reciprocă.

J331. Determine all positive integers n such that

$$n!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)$$

is divisible by n.

Proposed by Alessandro Ventullo, Milan, Italy

Soluţie:

După aducerea la același numitor, expresia din enunț se poate scrie

$$n!+\frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}+\ldots+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n}+1.$$

În afara ultimilor doi termeni, toți ceilalți sunt divizibili cu n. Trebuie ca (n-1)!+1 sa fie divizibil cu n, ceea ce se întâmplă, conform teoremei lui Wilson, dacă și numai dacă n este prim.

J335. Prove that for any $a, b > -1$,

$$\max\left\{(a+3)(b^2+3),(a^2+3)(b+3)\right\} \geq 2(a+b+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas

Soluţie:

Vom demonstra că

$$(a^2+3)(b+3)(a+3)(b^2+3) >= 4(a+b+2)^3. \qquad (1)$$

Avem $(a^2+3)(a+3) = a^3+3a^2+3a+9 = (a+1)^3+8$. Notând x=a+1, y=b+1 rezultă că x, y > 0, iar inegalitatea (1) se scrie

$(x^3+8)(y^3+8) >= 4(x+y)^3$ <=> $x^3y^3+4x^3+4y^3+64 >= 12x^2y+12xy^2$ (2)

Aplicând inegalitatea mediilor obținem

$$\frac{x^3y^3}{2}+4x^3+32\geqslant 3\sqrt[3]{64x^6y^3}=12x^2y,\ \frac{x^3y^3}{2}+4y^3+32\geqslant 12xy^2.$$

Prin adunare rezultă exact inegalitatea (2). Avem egalitate dacă și numai dacă x=y=2, adică a=b=1.

Variantă de demonstratie a inegalității $(x^3+8)(y^3+8)>=4(x+y)^3$.

Cu inegalitatea lui Holder avem

$$(x^3+8)(8+y^3)(1+1)\geqslant(2x+2y)^3\Leftrightarrow(x^3+8)(y^3+8)\geqslant 4(x+y)^3.$$

5. PROBLEMA BILIARDULUI ALTFEL … (SAU PROBLEMA RAZEI REFLECTATE)

Prof. Andrei Octavian Dobre

Colegiul Național "Nichita Stănescu" Ploiești

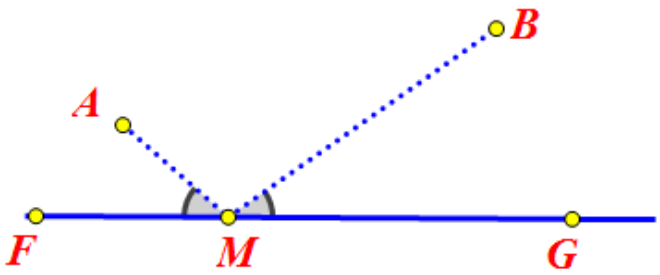
În acest articol aş dori sa prezint o problemă practică, unde putem folosi inegalităţile geometrice.

Să considerăm două bile aşezate pe o masa de billiard, ca în figura urmatoare. În ce direcţie trebuie lovită bila asezata in punctual *A* astfel incat dupa ciocnirea cu o latură a mesei să lovească bila aşezată în punctul *B*?



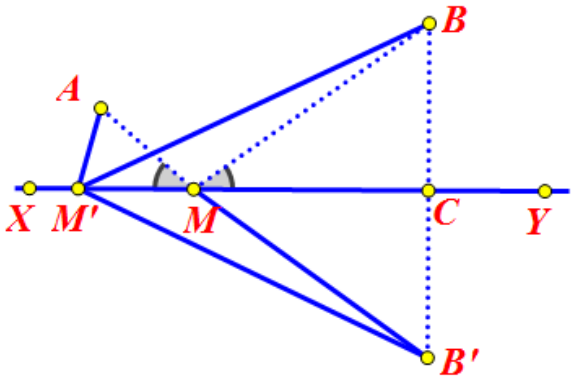
Ştim de la fizică că,în cazul unei ciocniri elastic, unghiurile (ascutite) facute de AM şi BM cu respective latură sunt congruente. Astfel, **am putea reformula problema** noastră in limbaj matematic în felul urmator:

1. Fie *A* şi *B* doua puncte situate de aceeaşi parte a unei drepte *FG* (ca în figura de mai jos). Să se determine poziţia unui punct *M* pe dreaptă astfel încât unghiurile $\angle AMF$ si $\angle BMG$ sa fie congruente.



În locul acestei probleme, vom formula alta, echivalentă (după cum vom vedea) cu ea:

2. Fie *A* si *B* două puncte situate de aceeaşi parte a unei drepte *XY*. Sa se determine poziţia unui punct *M* pe dreaptă astfel încât suma *AM+MB* sa fie minima.



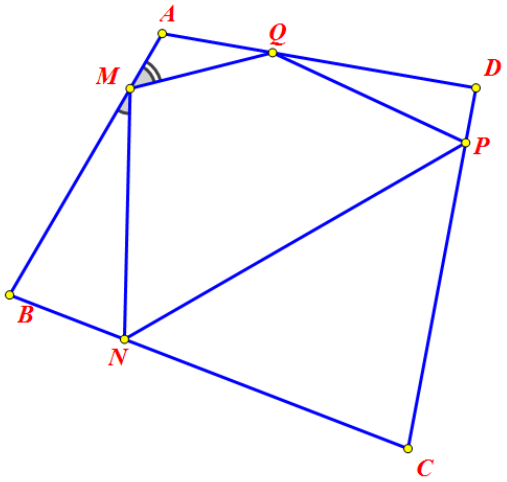
Soluţie: Fie *B'* simetricul punctului *B* faţă de dreapta şi *M'* un punct arbitrar pe acesta. Din simetrie, *BM'= B'M'*, prin urmare rezultă că *AM'+M'B=AM'+M'B'*. Ultima sumă este minimă atunci când punctele *A, M'* si *B'* sunt coliniare, aşadar punctul căutat este punctul *M,* intersecţia dintre dreaptă şi segmentul *AB'*.

Exerciţiu: Demonstraţi că, în acest caz, unghiurile facute de *AM* si *BM* cu dreapta respectivă sunt congruente.

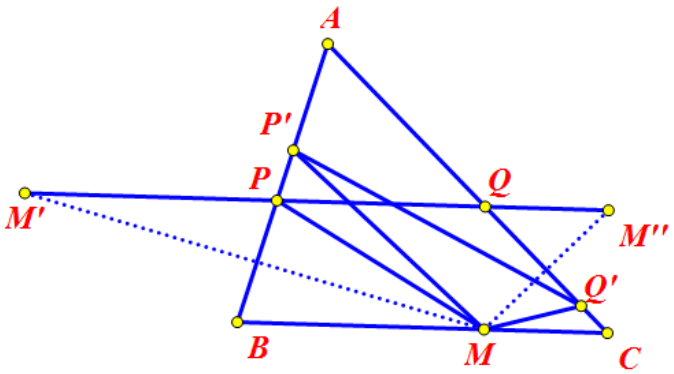
Dacă dreapta ar reprezenta suprafaţa unei oglinzi, atunci o raza de lumina care pleacă din punctul *A* în direcţia punctului *M* se va reflecta de oglinda şi, respectând legile reflexiei, va ajunge în punctul *B*. Astfel, înţelegem de ce se spune ca "lumina merge pe drumul cel mai scurt".

Probleme propuse unde putem folosi ideile precedente:.

1. Fie *ABCD* un patrulater convex. Să se arate că dacă există punctele *M, N, P, Q* situate, respective, în interiorul laturilor *AB, BC, CD, DA* astfel încât perimetrul patrulaterului *MNPQ* să fie minim, atunci *ABCD* este un patrulater inscriptibil.



P.6.4. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și M un punct situat în interiorul laturii BC . Să se determine pozițiile punctelor P și Q pe laturile AB și AC astfel încât perimetrul triunghiului MPQ să fie minim .



Bibliografie: Inegalităţi elementare ... şi mai puţin elementare, Mircea Becheanu, Bogdan Enescu , GIL 2002

6. Metode intresante de rezolvare

“ Problema lunii decembrie 2015”

Fie pătratul ABCD de latură „a”, cercul de centru O înscris în acest pătrat și punctul M mobil pe acest cerc. Să se arate că suma $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ este constantă.

Propusă spre rezolvare de prof. Andrei Octavian Dobre

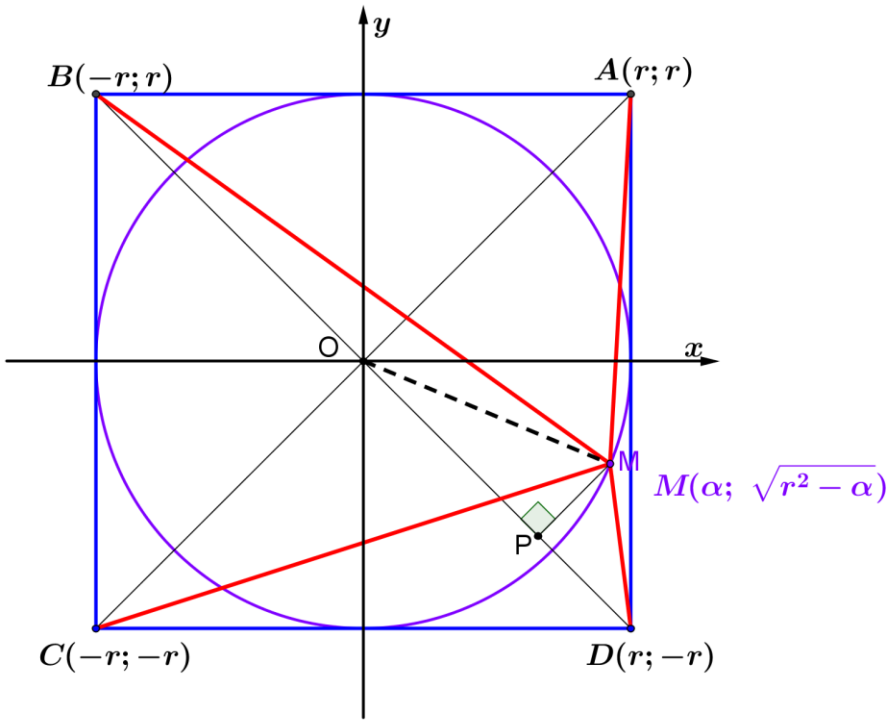
1. Prof. Constantin Telteu, C. N. A. „Regina Maria”, Constanța

I. *Rezolvare analitică*:

$a=2r$, unde r este raza cercului înscris în pătrat.

Considerăm un sistem ortogonal de axe ca în figură.

Ecuația cercului: $x^2+y^2=r^2$. Dacă M este pe cerc și abscisa lui este $x_M=\alpha$, atunci ordonata este $y_M=\sqrt{r^2-\alpha^2}$.



Cu formula distanței dintre două puncte, avem:

$$MA^2=(\alpha-r)^2+\left(\sqrt{r^2-\alpha^2}-r\right)^2$$

$$MD^2=(\alpha-r)^2+\left(\sqrt{r^2-\alpha^2}+r\right)^2$$

$$MC^2=(\alpha+r)^2+\left(\sqrt{r^2-\alpha^2}+r\right)^2$$

$$MB^2=(\alpha+r)^2+\left(\sqrt{r^2-\alpha^2}-r\right)^2$$

Adunăm relațiile, dezvoltăm binoamele, reducem termenii asemenea și obținem:

$S=4\alpha^2+8r^2+4\left(r^2-\alpha^2\right)=12r^2=3a^2=constant$.

II. ***Rezolvare sintetică cu teorema lui Pitagora generalizată****(clasa a VII-a):*

Fie *P* este proiecția lui *M* pe *BD* (a se vedea figura de mai sus).

Cu teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile *BOM*, respectiv *MOD*, obținem:

$OM^2=OB^2+MB^2-2\cdot OB\cdot BP$

$OM^2=OD^2+MD^2-2\cdot OD\cdot PD$

Adunăm cele două relații și obținem:

$2\cdot OM^2=2r^2+MB^2-2\cdot r\sqrt{2}\cdot BP+2r^2+MD^2-2\cdot r\sqrt{2}\cdot DP$ și pentru că $BP + DP = BD$

$2r^2=4r^2+MB^2+MD^2-2r\sqrt{2}\cdot 2r\sqrt{2}\Rightarrow MB^2+MD^2=6r^2$.

Analog obținem $MA^2+MC^2=6r^2$ și prin adunarea ultimelor două egalități obținem:

$S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=12r^2=3a^2=constant$

III. ***Rezolvare cu teorema medianei*** *(clasa a VII-a):*

Cu teorema medianei în triunghiurile MAC și MBD obținem succesiv*:*

$$MO^2=\frac{2\left(MA^2+MC^2\right)-AC^2}{4} \quad \text{și} \quad MO^2=\frac{2\left(MB^2+MD^2\right)-BD^2}{4}.$$

Adunăm egalitățile și $\Rightarrow 2\cdot MO^2=\frac{2\cdot S^2-2\cdot AC^2}{4}\Rightarrow S^2=4\cdot MO^2+AC^2$ și înlocuind $MO=\frac{a}{2}$ iar $AC=BD=a\sqrt{2}$, obținem $S^2=4\cdot\frac{a^2}{4}+2a^2=3a^2=constant$.

2. Prof. George-Florin Serban , Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" , Brăila

Metoda 1 : (Sintetic) Fie P,Q,R,S mijloacele laturilor [AB],[BC],[CD] respective [AD] , r este raza cercului , $OP=OQ=OR=OS=\frac{a}{2}=r$. In ΔMAC , aplic teorema medianei $MO^2=\frac{2(MA^2+MC^2)-AC^2}{4}$, $MA^2+MC^2=\frac{4MO^2+AC^2}{2}$. In ΔMBD , aplic teorema medianei

$MO^2=\frac{2(MB^2+MD^2)-BD^2}{4}$, $MB^2+MD^2=\frac{4MO^2+BD^2}{2}$. Deci

$S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$

$S=\frac{4MO^2+AC^2}{2}+\frac{4MO^2+BD^2}{2}=\frac{8MO^2+2BD^2}{2}=4r^2+BD^2$ este constanta .

Metoda 2 : (Vectorial) $\overrightarrow{MO}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{2}$, $2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$, ridic la patrat si obtin ca

$4\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$, dar $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AC}$, ridic la patrat $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ si le adun si obtin $2(\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2)=4\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{AC}^2$, $MA^2+MC^2=\frac{4MO^2+AC^2}{2}$. Analog $\overrightarrow{MO}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}}{2}$, $2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$, ridic la patrat si obtin $4\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$, dar $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BD}$, ridic la patrat si obtin $\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$ si le adun si obtin $2(\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2)=4\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{BD}^2$,

$MB^2+MD^2=\frac{4MO^2+BD^2}{2}$, $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\frac{4MO^2+AC^2}{2}+\frac{4MO^2+BD^2}{2}$

$S=\frac{8MO^2+2AC^2}{2}=4MO^2+AC^2=4r^2+AC^2$ este constanta .

Metoda 3 : (Analitic) In reperul catezian xoy , A(0,a) , B (a,a), C(a,0) si D(0,0)=O. Fie $O^{|}$ centrul cercului inscris in patrat, $O^{|}$ mijlocul lui [PR] , $P(\frac{a}{2},\frac{2a}{2})$, $R(\frac{a}{2},0)$, P mijlocul lui [AB] , R mijlocul lui [CD] , $O^{|}(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2},\frac{\frac{2a}{2}+0}{2})$, $O^{|}(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$. Ecuatia cercului $C(O^{|},\mathrm{r}=\frac{a}{2})$ este

$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$, $C: x^2+y^2-ax-ay+\frac{a^2}{4}=0$

$S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=x^2+(y-a)^2+(x-a)^2+(y-a)^2+(x-a)^2+y^2+x^2+y^2$

$S=4x^2+4y^2-4ax-4ay+4a^2=4(x^2+y^2-ax-ay)+4a^2=4\cdot(-\frac{a^2}{4})+4a^2=3a^2$ este constanta.

Metoda 4 : (Afixe – numere complexe) Fie O(0) , $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$, O mijlocul lui [AC] si [BD] , $z_1+z_3=z_2+z_4=0$, $z_3=-z_1$, $z_4=-z_2$, O(0), $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(-z_1), D(-z_2)$, M(z) $r=OP=|\frac{z_1+z_2}{2}|=\frac{a}{2}=|z|$, P mijlocul lui [AB] , $P(\frac{z_1+z_2}{2})$, $|z_1+z_2|=\mathrm{a}$, AO=OB , deci

$|z_1|=|z_2|=\frac{AC}{2}$, $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+|z+z_1|^2+|z+z_2|^2$

$S=(z-z_1)(\bar{z}-\overline{z_1})+(z-z_2)(\bar{z}-\overline{z_2})+(z+z_1)(\bar{z}+\overline{z_1})+(z+z_2)(\bar{z}+\overline{z_2})$

$S=z\bar{z}-z_1\bar{z}-z\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}+z\bar{z}-z_2\bar{z}-z\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}+z\bar{z}+z_1\bar{z}+z\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}+z\bar{z}+z_2\bar{z}+z\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$

$S=4|z|^2+4|z_1|^2=4r^2+(2|z_1|)^2=4r^2+AC^2$ este constanta .

Metoda 5 : (Sintetic) Fie P,Q,R,S mijloacele laturilor [AB],[BC],[CD] respective [AD] , r este raza cercului . In ΔMAC , aplic teorema medianei $MP^2=\frac{2(MA^2+MB^2)-AB^2}{4}$, In ΔMBC , aplic teorema medianei $MQ^2=\frac{2(MC^2+MB^2)-CB^2}{4}$, In ΔMDC , aplic teorema medianei

$MR^2=\frac{2(MC^2+MD^2)-CD^2}{4}$, In ΔMDA , aplic teorema medianei

$MS^2=\frac{2(MA^2+MD^2)-AD^2}{4}$. Le adun si obtin

$MP^2+MQ^2+MR^2+MS^2=\frac{4(MA^2+MB^2+MC^2+MD^2)-4a^2}{4}=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2-a^2$

In ΔMSQ dreptunghic , aplic teorema lui Pitagora $MS^2+MQ^2=SQ^2=a^2$,

In ΔMPR dreptunghic , aplic teorema lui Pitagora $MP^2+MR^2=PR^2=a^2$. Le adun si obtin

$MS^2+MQ^2+MP^2+MR^2=2a^2$ .Deci $S=MP^2+MQ^2+MR^2+MS^2+a^2=2a^2+a^2=3a^2$ este constanta .

Sau alta metoda : In ΔMSQ , aplic teorema medianei $MO^2=\frac{2(MS^2+MQ^2)-SQ^2}{4}$, rezulta

$MS^2+MQ^2=\frac{4MO^2+SQ^2}{2}$. In ΔMPR , aplic teorema medianei

$MO^2=\frac{2(MP^2+MR^2)-PR^2}{4}$,

Rezulta $MP^2+MR^2=\frac{4MO^2+PR^2}{2}$, le adun si obtin

$MP^2+MQ^2+MR^2+MS^2=\frac{8MO^2+PR^2+SQ^2}{2}=\frac{8MO^2+a^2+a^2}{2}=4MO^2+a^2=4r^2+a^2$ este constanta .

3.Prof. Roxana Mihaela Stanciu şi prof. Nela Ciceu

Vom demonstra că $MA^2+MC^2=\frac{3a^2}{2}$.

I. Soluţie analitică: alegem un sistem de coordinate cu originea în centrul O al cercului înscris în pătrat, astfel încât $A\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right), C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. Fie $M(p,q)$ cu $p^2+q^2=\frac{a^2}{4}$. Avem:

$$MA^2+MC^2=\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+\left(q+\frac{a}{2}\right)^2+\left(p-\frac{a}{2}\right)^2+\left(q-\frac{a}{2}\right)^2=2(p^2+q^2)+a^2=\frac{3a^2}{2}.$$

II. Cu formula medianei în triunghiul MAC obţinem:

$$4MO^2 = 2(MA^2 - MC^2) - AC^2 \Rightarrow MA^2 + MC^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

Analog,

$$MB^2 + MD^2 = \frac{3a^2}{2},$$

deci

$$S = 3a^2.$$

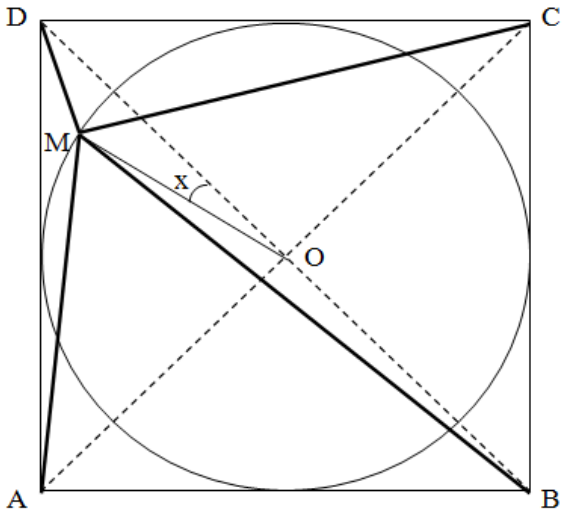
Comentariu.

- Ambele soluţii rămân valabile şi pentru următoarea generalizare: cercul înscris în pătrat poate fi înlocuit cu orice cerc cu centrul în O.
- Problema este strâns legată de următoarea problemă de loc geometric:

''Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului determinat de punctele fixe''

4. Prof. Laura Radu, Liceul Teoretic „Emil Racoviţă”, Galaţi

Notăm $m(\widehat{DOM}) = x$. Ştiind că $AB = a$, atunci $AC = BD = a\sqrt{2}$, $AO = BO = CO = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi $MO = R = \frac{a}{2}$.



$$\Delta MOA \Rightarrow MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cdot \cos(\widehat{MOA})$$
$$MA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(90^\circ - x)$$
$$MA^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x$$

$$\Delta MOB \Rightarrow MB^2 = MO^2 + BO^2 - 2MO \cdot BO \cdot \cos(\widehat{MOB})$$
$$MB^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(180^\circ - x)$$
$$MB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x$$

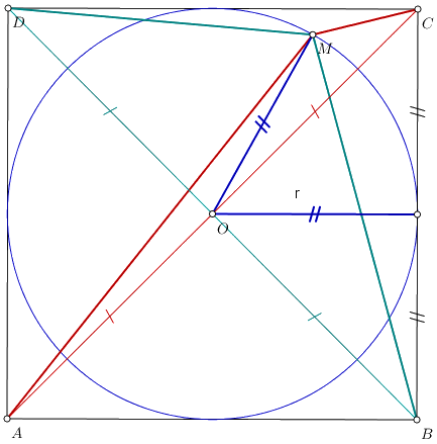
$$\Delta MOC \Rightarrow MC^2 = MO^2 + CO^2 - 2MO \cdot CO \cdot \cos(\widehat{MOC})$$
$$MC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(90^\circ + x)$$
$$MC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x$$

$$\Delta MOD \Rightarrow MD^2 = MO^2 + DO^2 - 2MO \cdot DO \cdot \cos(\widehat{MOD})$$
$$MD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x$$
$$MD^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot cosx$$

$$S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3a^2 - \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(sinx - cosx - sinx + cosx) = 3a^2 = const.$$

5. Prof. Oláh Csaba, Bălan

***Rezolvare*:** In primul rând, observăm că $MO = r = \frac{a}{2}$, r fiind raza cercului (O).



În triunghiul MAC, $[MO]$ este mediană (O e mijlocul lui $[AC]$).

Conform *Teoremei medianei*, avem

$$MO^2 = \frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \quad (1).$$

$[MO]$ este mediană și în triunghiul MBD (O e mijlocul lui $[BD]$), deci avem

$$MO^2 = \frac{MB^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \quad (2).$$

Folosind relațiile (1) și (2), putem scrie $\left.\begin{cases} MA^2+MC^2=2\cdot\dfrac{4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{2} \\ MB^2+MD^2=2\cdot\dfrac{4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{2} \end{cases}\right|(+)\Leftrightarrow$

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{3a^2}{2}=3a^2$ - constantă.

6.Prof. Păcurar Cornel-Cosmin

Considerăm xOy astfel încât O(0,0) este centrul pătratului ABCD,Ox⊥AD,Ox⊥BC,Oy⊥AB,Oy⊥DC cu $A\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$B\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,$D\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

Deducem că ecuația cercului înscris în pătratul ABCD este $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

Din $M(x_M,y_M)$ aparține la cercul de ecuație $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ și $x_M=\alpha\in\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ deducem $y_M^2=\frac{a^2}{4}-\alpha^2$.

MA=$\sqrt{\left(-\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-y_M\right)^2}$, MB=$\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-y_M\right)^2}$,

MC=$\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}-y_M\right)^2}$,

MD=$\sqrt{\left(-\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}-y_M\right)^2}$.

S=

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\left(-\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-y_M\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-y_M\right)^2+$

$+\left(\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}-y_M\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{a}{2}-y_M\right)^2=\frac{a^2}{4}+\alpha^2+a\alpha+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\alpha^2+ay_M+$

$+\frac{a^2}{4}+\alpha^2-a\alpha+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\alpha^2+ay_M+\frac{a^2}{4}+\alpha^2-a\alpha+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\alpha^2-ay_M+\frac{a^2}{4}+\alpha^2++a\alpha+$

$+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\alpha^2-ay_M=3a^2$

,care este constantă.

7. *Prof. Avram Bianca Veronica , Blaj, Alba*

ABCD-patrat
AB=a
Cercul de centru O este inscris in patrat
M-pct mobil pe cerc
C: S=$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$
Dem:
OM=raza cercului=$\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$
AO=BO=CO=DO=$\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Folosim teorema cosinusului

$$\Delta AMO \Longrightarrow MA^2 = MO^2 + OA^2 - 2MO \cdot AO cos\sphericalangle AOM$$

$$MA^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} cos\sphericalangle AOM$$

$$\Delta BMO \Longrightarrow MB^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} cos\sphericalangle BOM$$

$$\Delta CMO \Longrightarrow MC^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} cos\sphericalangle COM$$

$$\Delta DMO \Longrightarrow MD^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} cos\sphericalangle DOM$$

$$\Longrightarrow S = 4\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(cos\sphericalangle AOM + cos\sphericalangle BOM + cos\sphericalangle COM + cos\sphericalangle DOM)$$

$$cos\sphericalangle AOM + cos\sphericalangle BOM + cos\sphericalangle COM + cos\sphericalangle DOM=$$

$$= \cos\big(360° - (MOC + COA)\big) + \cos\big(360° - (BOD + DOM)\big) + cosCOM + cosDOM$$

=

$$= cos360° \cos(MOC + 180°) + sin360° \sin(MOC + 180°)$$
$$+ cos360° \cos(180° + DOM) + sin360° \sin(180° + DOM)$$
$$+ cosCOM + cosDOM =$$

=cosMOCcos180
$° - sinMOCsin180° + cosDOMcos180° - sinDOMsin180° + cosCOM +$
$cosDOM =$

$$= -cosMOC - cosDOM + cosMOC + cosDOM = 0$$

$\Longrightarrow S = 3a^2 = constant$ (nu depinde pe pozitia lui M)

7. O problemă de geometrie în spațiu cu mai multe metode de rezolvare

Se dă cubul *ABCDEFGH* de muchie a, se ia punctul $V \in DF$ astfel încât $F \in (DV)$ şi se notează $FV = x$.

Notăm cu : A **volumul corpului obţinut din intersecţia cubului cu piramida *VACH*;**

B **volumul piramidei *VACH*;**

C **volumul cubului minus *A*;**

R **volumul piramidei *VACH* minus *A*.**

Să se determine x ştiind că A, B, C este o progresie aritmetică cu raţia R.

Prof. Constantin Telteu,

COLEGIUL NATIONAL DE ARTE „REGINA MARIA”, Constanţa

Soluţie autor:

ΔACH este echilateral şi $DF \perp (ACH)$ (Piramida $DACH$ este regulată şi $FACH$ este tetraedru regulat). Rezultă că piramida $VACH$ este regulată.

VO (O este centrul feţei $ABCD$) şi BF sunt coplanare, ambele fiind incluse în planul (VDB), deci $\exists \{M\} = VO \cap BF$. Analog celelalte apoteme ale piramidei $VACH$ intersectează muchiile EF, respectiv FG ale cubului.

Sunt necesare câteva calcule:

$BD = a\sqrt{2};\ HO = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2};\ IF = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ IV = \frac{a\sqrt{3}}{2} + x,$ unde I este mijlocul diagonalei cubului.

Avem $\Delta VIO \sim \Delta VFM\,(T.F.A.) \Rightarrow \frac{OI}{FM} = \frac{VI}{VF} \Rightarrow \frac{a}{2FM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} + x}{x} \Rightarrow FM = \frac{ax}{a\sqrt{3} + 2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow MB = a - \frac{ax}{a\sqrt{3} + 2x} = \frac{a\left(a\sqrt{3} + x\right)}{a\sqrt{3} + 2x}.$

$$A = V_{cub} - 3V_{MABC} - V_{RACH} = a^3 - 3\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\left(a\sqrt{3}+x\right)}{a\sqrt{3}+2x} - \frac{a^3}{6} = \frac{a^3\left(2a\sqrt{3}+7x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)}.$$

$$B = V_{VACH} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}+x\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}\left(2a\sqrt{3}+3x\right)}{18}.$$

$$C = a^3 - \frac{a^3\left(2a\sqrt{3}+7x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)} = \frac{a^3\left(4a\sqrt{3}+5x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)}.$$

$$R = \frac{a^2\sqrt{3}\left(2a\sqrt{3}+3x\right)}{18} = \frac{a^3\left(2a\sqrt{3}+7x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)} = \frac{a^2x^2\sqrt{3}}{3\left(a\sqrt{3}+2x\right)}.$$

Condiţia ca A,B,C să fie în progresie aritmetică este:

$\frac{a^2\sqrt{3}\left(2a\sqrt{3}+3x\right)}{9} = \frac{a^3\left(2a\sqrt{3}+7x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)} + \frac{a^3\left(4a\sqrt{3}+5x\right)}{6\left(a\sqrt{3}+2x\right)}$, de unde după aducerea la acelaşi numitor şi reducerea termenilor asemenea: $2x^2\sqrt{3}+ax-a^2\sqrt{3}=0$ cu soluţia convenabilă $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ -

Pentru această valoare a lui x obţinem: $A=\frac{13a^3}{30};\ B=\frac{a^3}{2};\ C=\frac{17a^3}{30};\ R=\frac{a^3}{15}$.

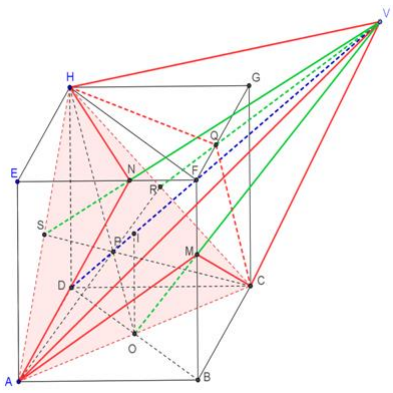


Fig. 1

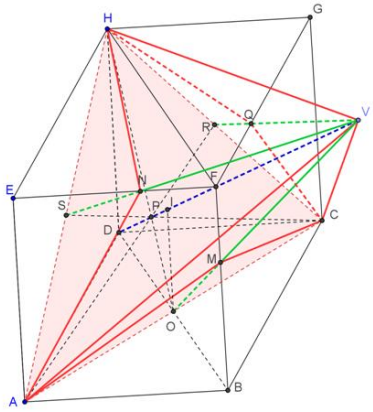


Fig. 2

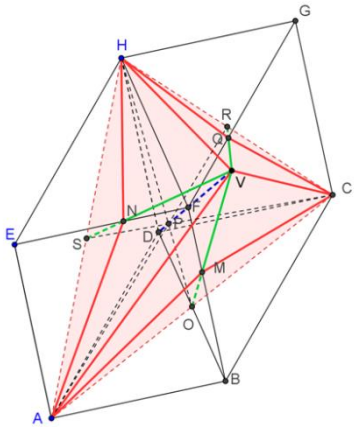
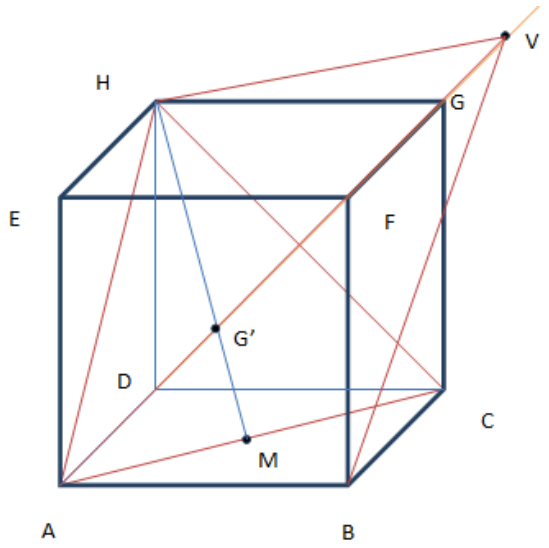


Fig. 3

Alte soluţii:

1. Elev Vasile Cristi Alexandru, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu” Bucureşti



$Din\ enunț: \begin{cases} A+R=B \\ B+R=C \end{cases}$

$Not.\ Aria\ piramidei\ VACH\ cu\ V_{pir}$

$Aria\ cubului\ ABCDEFGH\ cu\ V_{cub}$

$Atunci: B = V_{pir}$

$C = V_{cub} - A$

$R = V_{pir} - A$

$De\ asemenea: A + R = B \Rightarrow A + V_{pir} - A = V_{pir}(ident.)$

$B + R = C \Rightarrow V_{pir} + V_{pir} - A = V_{cub} - A$

$Sau: 2V_{pir} = V_{cub}\ (*)$

$$V_{pir} = A_{ACH} \cdot G'V \cdot \frac{1}{3}\ (G'\ c.g.al\ \triangle HAC)$$

$$A_{ACH} = AC \cdot HM \cdot \frac{1}{2}(M\ mij.lui\ [AC])$$

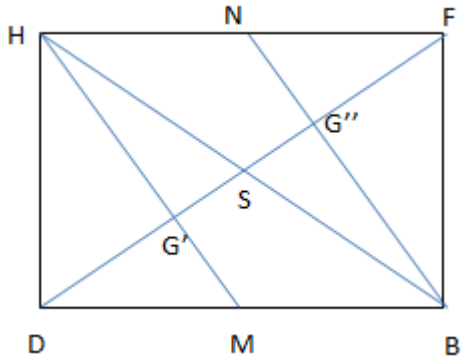
$$AC = a\sqrt{2}$$

$$T.Pitagora\ în\ \triangle HMC\ (HM \perp AC\ din\ teor.celor\ 3\ perp.) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HM = \sqrt{HC^2 - MC^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8a-2a}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$A_{ACH} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

G' se află la o treime de D și la două treimi de F :
$HFBD$ dreptunghi ($FB \perp BD$ și $DH \perp HF$), S mijlocul diag.



Fie $\{G'\} = NB \cap DF$

În $\triangle HFB$ NB, FS mediane (S, N mij. lat. $[HB], [HF]$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow G'$ c.g. $\Rightarrow G'S = \frac{1}{2}G'F$

În $\triangle HDB$ HM, DS mediane (M, S mij. lat. $[DB], [HB]$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow G''$ c.g. $\Rightarrow GS = \frac{1}{2}G''D$

Dar $DS = SF$ (S mij $[DF]$) $\Rightarrow DF = 6SG' \Rightarrow GF = \frac{2}{3}DF$.

$$G'F = \frac{2a\sqrt{3}}{3} (DF \text{ diag. cubului})$$

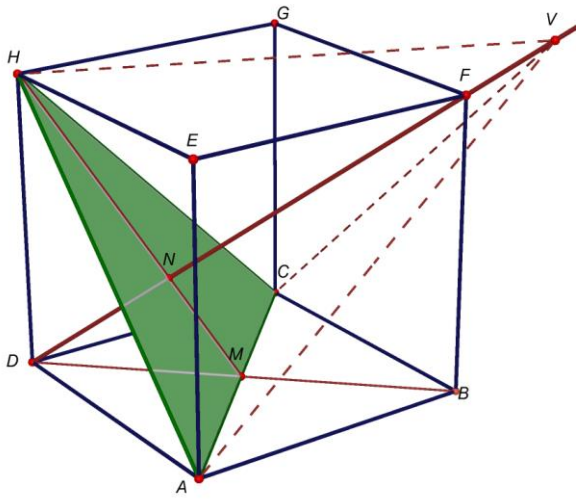
$$G'V = G'F + x = \frac{2a\sqrt{3}}{3} + x$$

$$Deci: V_{pir} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} + x\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2a^3 + a^2x\sqrt{3}}{6}$$

$$Din\ (*) \Rightarrow 2 \cdot \frac{2a^3 + a^2x\sqrt{3}}{6} = a^3 \Rightarrow 2a^3 + a^2x\sqrt{3} = 3a^3 \Rightarrow x\sqrt{3} = a \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Q.E.D.

2. Profesor Biro Istvan



Dacă A,B,C este o progresie aritmetică cu rația R atunci avem:

$R = B - A = C - B \Rightarrow B = \frac{A+C}{2}$, dar $C = a^3 - A$, adică

$B = \frac{a^3}{2}$. (*)

În dreptunghiul $BDHF$ fie $\{M\} = BD \cap AC$ (mijlocul lui BD) și $\{N\} = DF \cap HM$, unde $BD = a\sqrt{2}, DF = a\sqrt{3}, HD = a$. Observăm că $tg(\angle(HMD)) = tg(\angle(DFB)) = tg(\alpha) = \sqrt{2}$, deci

patrulaterul *BFNM* este inscriptibil, de unde rezultă că $HM \perp DF$, adică *VN* este înălţimea piramidei *VACH*.

Pe de altă parte $\sin(\alpha)=\frac{BD}{DF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{DN}{DM}\Rightarrow DN=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ şi având în vedere (*) rezultă că $B=\frac{a^3}{2}=\frac{A_{ACH}.VN}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3}-\frac{a}{\sqrt{3}}+x)}{3}$, de unde $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

3. Prof. Gheorghe ROTARIU

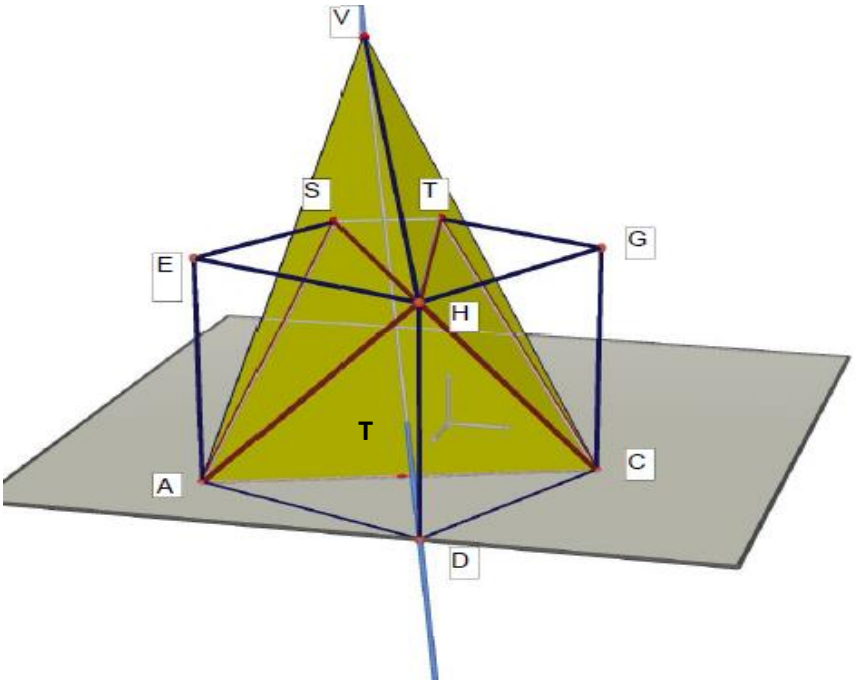


Figura 1.

Intersectând cubul *ABCDEFGH* cu piramida *VACH* se obţine piramida patrulateră *HACTS* (baza fiind suprafaţa trapezoidală *ACTS*). Pentru a afla volumul acestei piramide patrulatere, vom scădea din volumul cubului volumele a 4 poliedre (3 piramide triunghiulare: *HADC*, *CGTH*, *AESH* şi trunchiul de piramidă *ABCSFT* - vârfurile *B* şi *F* nu sunt vizibile în Figura 1 din cauza piramidei *VACH*).

Vom nota, pentru comoditatea scrierii, lungimea segmentului $FT\,(\equiv FS)$ cu: $FT=y$, $y\in(0,a)$.

Se presupun cunoscute formulele pentru volumul cubului, ale piramidei şi ale trunchiului de piramidă.

Începem prin a calcula A.

$$A=\mathcal{V}_{ABCDEFGH}-\left(\mathcal{V}_{HADC}+\mathcal{V}_{CGTH}+\mathcal{V}_{AESH}+\mathcal{V}_{ABCSFT}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=a^3-\left(\frac{\frac{AD\cdot DC}{2}\cdot HD}{3}+2\cdot\frac{\frac{HG\cdot GT}{2}\cdot CG}{3}+\frac{BF}{3}\left(\mathcal{A}_{ABC}+\mathcal{A}_{SFT}+\sqrt{\mathcal{A}_{ABC}\cdot\mathcal{A}_{SFT}}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=a^3-\left(\frac{a^3}{6}+2\cdot\frac{a^2(a-y)}{6}+\frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{ay}{2}\right)\right)\Rightarrow$$

$$A=a^3-\left(\frac{a^3}{6}+2\cdot\frac{a^2(a-y)}{6}+\frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{ay}{2}\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=a^3-\left(\frac{a^3}{6}+\frac{a^2(a-y)}{3}+\frac{a^3}{6}+\frac{ay^2}{6}+\frac{a^2y}{6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{4a^3-2a^2(a-y)-ay^2-a^2y}{6}\Rightarrow A=\frac{4a^3-a^2(2a-y)-ay^2}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{2a^3+a^2y-ay^2}{6}\qquad(1)$$

Calculăm pe B.

Se verifică uşor că dreapta VD este perpendiculară pe planul triunghiului HAC. Mai mult dacă $\{T\}=VD\cap(HAC)$, se demonstrează relativ simplu că $DT=\frac{1}{3}DF=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ca atare, înălţimea în piramida $VACH$, corespunzătoare bazei HAC, şi anume VT, are lungimea:

$$VT=VF+FT=x+\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{3x+a\sqrt{3}}{3}$$

Baza HAC este un triunghi echilateral de latură $HA=a\sqrt{2}$. Aria suprafeţei triunghiulare HAC este egală cu:

$$\mathcal{A}_{HAC}=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Cu acestea,

$$B=\frac{\frac{2a\sqrt{3}+3x}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{2a^3+a^2\sqrt{3}\,x}{6} \qquad (2)$$

Calculăm pe C.

$$C=a^3-\frac{2a^3+a^2y-ay^2}{6}\Rightarrow C=\frac{4a^3-a^2y+ay^2}{6} \qquad (3)$$

Din definiţia lui R, avem:

$$R=B-A \qquad (4)$$

Din faptul că A, B, C este o progresie aritmetică de raţie R, rezultă că:

$$B-A=C-B=R\left(\overset{(4)}{=}B-A\right)\Rightarrow B=\frac{A+C}{2}\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow}\frac{2a^3+a^2\sqrt{3}\,x}{6}=$$

$$=\frac{\frac{2a^3+a^2y-ay^2}{6}+\frac{4a^3-a^2y+ay^2}{6}}{2}\Rightarrow\frac{2a^3+a^2\sqrt{3}\,x}{6}=\frac{a^3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^3+a^2\sqrt{3}\,x=3a^3\Rightarrow x=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad \square$$

În concluzie, soluţia este: $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Observaţii:

- În enunţul problemei, R putea să nu apară. Nu intervine în rezolvarea ei.
- Condiţia ca R să fie raţia progresiei aritmetice $\div A, B, C$ este superfluă, din definiţia lui R. Ea se impunea doar dacă R avea o expresie diferită de $B-A$ şi de $C-B$.

4. Prof.Olah Csaba

Rezolvare: Fie $V_1 = V_{MABC}$, $V_2 = V_{M_1AEH} = V_{M_2CGH}$, $V_3 = V_{HACD} = \frac{a^3}{6}$, unde $MABC, M_1AEH, M_2CGH$ si $HACD$ sunt "colturile" cubului (piramide), care sunt taiate de fetele laterale ale piramidei $VACH$, astfel incat:

$\{M\} = (VAC) \cap FB$, $\{M_1\} = (VHA) \cap EF$, $\{M_2\} = (VHC) \cap FG$.

Fie HO inaltimea triunghiului echilateral ACH, $FD \cap HO = \{G\}$, O_1 mijlocul lui DF.

Observam, ca $OO_1 \| HD \Rightarrow$ triunghiurile GOO_1 si GHD sunt asemenea, deci

$$\left.\begin{array}{l} \frac{OG}{GH} = \frac{O_1G}{GD} = \frac{O_1O}{HD} = \frac{1}{2} \\ DO_1 = \frac{DF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ HO = \sqrt{HD^2 + DO^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} GO_1 = \frac{1}{3}DO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ GO = \frac{1}{3}HO = \frac{a\sqrt{6}}{6} \end{array}.$$

$GO_1^2 + GO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{9a^2}{36} = \frac{a^2}{4} = OO_1^2 \Rightarrow$ unghiul OGO_1 este drept $\Rightarrow$

$FG \perp HO \Rightarrow$ din motive de simetrie FG este perpendicular pe planul (ACH), adica VG este inaltimea piramidei $VACH$, iar $VG = GO_1 + O_1F + FV = \frac{2a\sqrt{3}}{3} + x$.

Sa determinam volumele A, B, C si R.

$$A = V_{ABCDEFGH} - (V_1 + 2V_2 + V_3) = a^3 - \frac{a^3}{6} - (V_1 + 2V_2) = \frac{5a^3}{6} - (V_1 + 2V_2),$$

$$B = V_{VAHC} = \frac{S_{ACH} \cdot VG}{3} = \frac{\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} + x\right)}{3} = \frac{a^3 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}x}{3} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{6}x,$$

$$C = V_{ABCDEFGH} - A = a^3 - \frac{5a^3}{6} + (V_1 + 2V_2) = \frac{a^3}{6} + (V_1 + 2V_2),$$

$$R = V_{VACH} - A = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{6}x - \frac{5a^3}{6} + (V_1 + 2V_2) = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}x - \frac{a^3}{2} + (V_1 + 2V_2).$$

Daca A, B, C sunt in progresie aritmetica, cu ratia $R \Rightarrow C - B = R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{6} + (V_1 + 2V_2) - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6}x = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}x - \frac{a^3}{2} + (V_1 + 2V_2) \overset{V_1+2V_2 \text{ se reduce}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2\sqrt{3}}{6}x = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{3} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{3}x = \frac{a^3}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

In concluzie $\underline{x = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$.

Bibliografie : Problema săptămânii 1.08.2011- 7.08.2011 – **www.mateinfo.ro**

8. Problema lunii IANUARIE 2016

Se dă sfera de diametru AB și M un punct variabil pe sferă , diferit de A și B. Dacă N și P sunt punctele în care AM și MB, respectiv, intersectează planele tangente la sferă în B și A, să se arate că produsul $AP \cdot BN$ nu depinde de poziția punctului M.

Problemă propusă spre rezolvare de Andrei Octavian Dobre

Așteptăm soluțile problemei până la date de 31.01.2016 pe adresa de e-mail revista@mateinfo.ro