NOTĂ MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS (II)

Corneliu Mănescu-Avram

1. Într-un triunghi isoscel de bază a şi latură egală cu b, unghiul de la vârf este egal cu 20°. Demonstrați că $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

(14 – 20.09.2009, *Nicolae Nica*)

Proprietatea se păstrează dacă unghiul de la vârf are măsura de 100°, deoarece $\frac{3}{2} \cdot 100° =$ = 150° şi sin 150° = sin 30° = $\frac{1}{2}$ (demonstrația este aceeaşi).

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$, fie G centrul de greutate al triunghiului $AB'C$ şi M un punct pe dreapta BG astfel încât $MA = MB' = MC$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$, să se calculeze distanța de la punctul M la planul $(AB'C)$.

(8 – 14.03.2010, *Biro Istvan*)

Problema poate fi pusă într-un cadru mai general :

Se consideră în spațiul euclidian n – dimensional $\mathbb{R}^n$ punctele $O(0, 0, ..., 0)$, $A_1(a_1, 0, ..., 0)$, $A_2(0, a_2, ..., 0)$, ..., $A_n(0, 0, ..., a_n)$, astfel încât cel puțin două dintre numerele reale $|a_1|, |a_2|$, ..., $|a_n|$ sunt distincte, centrul de greutate G al sistemului de puncte materiale $A_1, A_2, ..., A_n$ şi M un punct pe dreapta OG astfel încât $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$. Să se calculeze distanța de la punctul M la hiperplanul care trece prin punctele $A_1, A_2, ..., A_n$.

Soluție : Centrul de greutate are coordonatele $G\left(\frac{a_1}{n}, \frac{a_2}{n}, ..., \frac{a_n}{n}\right)$, dreapta (OG) şi hiperplanul $(A_1A_2 ... A_n)$ au ecuațiile

$$(OG): \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n} \quad (1), \qquad (A_1A_2 ... A_n): \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + ... + \frac{x_n}{a_n} = 1. \quad (2)$$

Fie $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ punctul căutat şi t valoarea comună a rapoartelor din (1). Avem

$$M \in OG \text{ dacă şi numai dacă } x_1 = a_1t, \ x_2 = a_2t, ..., x_n = a_nt \qquad (3)$$

şi $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$ dacă şi numai dacă

$$(x_1 - a_1)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + x_n^2 = \ldots = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2.$$
(4)

Se reduc termenii asemenea în (4), se înlocuiesc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din (3) şi se obţin egalităţile

$$(1 - 2t)a_1^2 = (1 - 2t)a_2^2 = \ldots = (1 - 2t)a_n^2.$$

Cel puţin două dintre numerele $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$ sunt distincte, aşadar $1 - 2t = 0$ şi $M\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2}\right)$.

Se deduce că distanţa de la punctul M la hiperplanul $(A_1A_2 \ldots A_n)$ este egală cu

$$\frac{\left|\frac{a_1}{2a_1} + \frac{a_2}{2a_2} + \ldots + \frac{a_n}{2a_n} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}}} = \frac{(n-2)|a_1 a_2 \ldots a_n|}{2\sqrt{\sigma_{n-1}(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)}},$$

unde $\sigma_{n-1}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1X_2 \ldots X_{n-1} + X_1X_2 \ldots X_{n-2}X_n + \ldots + X_2X_3 \ldots X_n$ este al $n - 1$-lea polinom simetric fundamental.

3. Se consideră poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, înscris în cercul de rază R. Să se arate că dacă $A_1A_{n-1} - A_1A_{n-3} + A_1A_{n-5} = R$, atunci $n = 7$.

(12 – 18.04.2010, *Corneliu Mănescu - Avram*)

Dacă egalitatea din enunţ se înlocuieşte cu $A_1A_{n-1} - A_1A_{n-3} + \ldots + (-1)^{k-1}A_1A_{n-2k+1} = R$, atunci $n = 2k + 1$. Într-adevăr, diagonala A_1A_{n+1} este diametru, deci $A_1A_{n-1} = 2R\cos x$, $A_1A_{n-3} = 2R\cos 2x$, ..., $A_1A_{n-2k+1} = 2R\cos kx$, unde $x = \frac{\pi}{n}$. Se obţine ecuaţia

$$2[\cos x - \cos 2x + \ldots + (-1)^k \cos kx] = 1.$$

Se înmulţeşte egalitatea cu $\sin x$, se transformă produsele în sume, se reduc termenii asemenea şi se obţine ecuaţia $\sin (k + 1)x = \sin kx$, cu soluţia convenabilă $x = \frac{\pi}{2k+1}$, deci $n = 2k + 1$.

4. Să se arate că în orice triunghi are loc dubla inegalitate

$$\frac{r_a + r_b + r_c}{3} \geq R + r \geq \sqrt[5]{r_a r_b r_c}.$$

(19 – 25.04.2010, *Nicolae Nica*)

Prima inegalitate se demonstrează simplu, folosind inegalitatea lui *Euler*, o demonstrație directă a celei de-a doua inegalitați este ceva mai dificilă (a se vedea soluția autorului problemei). Ceilalți rezolvitori au preferat însă o demonstație indirectă, care presupune considerarea unei valori intermediare : $\sqrt[3]{\frac{27R^2r}{4}}$ (*Octavian Mustafa*, *Silvia Muşătoiu, Olah Csaba*), $\sqrt[5]{(4R^2+4Rr+3r^2)r}$ (*Biro Istvan*), $\sqrt[3]{\frac{(4R+r)^2r}{3}}$ (*Corneliu Mănescu-Avram*). Aceste valori intermediare pot fi puse în ordine astfel :

În orice triunghi sunt adevărate inegalitățile

$$\sqrt{3(R^2-Rr+r^2)} \geq \frac{r_a+r_b+r_c}{3} \geq R+r \geq \sqrt[3]{\frac{27R^2r}{4}} \geq \sqrt[5]{(4R^2+4Rr+3r^2)r} \geq$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{(4R+r)^2r}{3}} \geq \sqrt[5]{r_ar_br_c} \geq 3r.$$

Este suficient să demonstrăm prima, a patra şi a cincea inegalitate, întrucât celelalte au fost demonstrate de rezolvitori. Folosind egalitatea $r_a+r_b+r_c = 4R+r$ şi substituția $R = xr$, $x \geq 2$ (*Euler*), după efectuarea calculelor se obțin inegalitățile

$$27(x^2-x+1) \geq (4x+1)^2, \quad 4(x+1)^3 \geq 27x^2, \quad 27x^2 \geq 4(4x^2+4x+3),$$

echivalente respectiv cu

$$(x-2)(11x-13) \geq 0, \quad (x-2)^2(4x+1) \geq 0, \quad (x-2)(11x+6) \geq 0,$$

care sunt adevărate pentru $x \geq 2$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(\sqrt{n}, 0)$ şi B_n în primul cadran astfel încât triunghiul $A_nB_nA_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este echilateral. Să se arate că punctele B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt situate pe o hiperbolă.

(10 – 16.05.2010, *Corneliu Mănescu - Avram*)

Mai general, are loc :

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale pozitive şi punctele $A_n(\sqrt{a_n}, 0)$, $n \in \mathbb{N}^*$. În condiţiile din problema precedentă, următoarele afirmaţii sunt echivalente

a) şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică ;

b) punctele B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt situate pe o hiperbolă echilateră ale cărei asimptote sunt axele de coordonate..

Demonstraţie : a) $\Rightarrow$ b)

Fie r raţia progresiei şi $B_n(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$x_n = \frac{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}{2}, \qquad y_n = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})}{2},$$

de unde se deduce

$$x_n y_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(a_{n+1} - a_n) = \frac{r\sqrt{3}}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

aşadar toate punctele B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, se află pe hiperbola echilateră cu ecuaţia $xy = \frac{r\sqrt{3}}{4}$.

b) $\Leftarrow$ a)

Dacă punctele B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, se află pe hiperbola xy = const., atunci $a_{n+1} - a_n$ = const., $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică.

6. a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un triunghi ABC având lungimile laturilor

$$c = AB = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}, \; b = AC = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}, \; a = BC = \sqrt{8x^2 + 10}.$$

b) Aria triunghiului ABC este un număr iraţional care nu depinde de x.

(17 – 23.05.2010, *Iuliana Traşcă*)

Se împart toate lungimile la $\sqrt{2}$ şi se obţine, mai general

a) Dacă $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, $m^2 < 4n$, atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un triunghi ABC având lungimile laturilor

$$c = \sqrt{x^2 - mx + n}, \quad b = \sqrt{x^2 + mx + n}, \quad a = \sqrt{4x^2 + 4n - m^2}.$$

b) Aria triunghiului ABC nu depinde de x ; dacă $m,\ n \in \mathbb{Q}$ şi $4n - m^2$ nu este pătratul unui număr raţional, atunci aria este un număr iraţional.

Demonstraţia este simplă :

a) Se observă că funcţiile de gradul doi în x de sub radical iau numai valori strict pozitive, deoarece au discriminantul strict negativ şi coeficientul lui x^2 pozitiv. Se calculează $16S^2 = m^2(4n - m^2) > 0$, deci triunghiul există. Acest triunghi poate fi construit efectiv : vârfurile lui sunt punctele $A\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, $B\left(x, \frac{\sqrt{4n-m^2}}{2}\right)$, $C\left(-x, -\frac{\sqrt{4n-m^2}}{2}\right)$ (*Cantemir Iliescu*).

b) $S = \frac{|m|\sqrt{4n-m^2}}{4}$ nu depinde de x ; dacă $m,\ n \in \mathbb{Q}$ şi $4n - m^2$ nu este pătratul unui număr raţional, atunci $\sqrt{4n - m^2} \notin \mathbb{Q}$, deci $S \notin \mathbb{Q}$.

7. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură a şi $E \in (AB)$ un punct mobil. Dacă M este intersecţia bisectoarei interioare unghiului $\widehat{EDC}$ cu perpendiculara din E pe DC, să se determine aria suprafeţei cuprinse între locul geometric al punctului M şi dreptele AD, DC, BC.

(21 – 27.06.2010, *Cantemir Iliescu*)

Dacă punctul E descrie graficul funcţiei $y = f(x)$, unde $f : [0, a] \to \mathbb{R}^*$, atunci punctul M descrie graficul funcţiei $g : [0, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + f^2(x)} - x^2}{f(x)}$, iar aria suprafeţei cuprinse între dreptele $x = 0$, $x = a$, axa Ox şi graficul funcţiei g este $\mathcal{A}_a = \int_0^a g(x)dx$.

Bibliografie

[1]. Problema săptămânii, mateinfo.ro

[2]. Mănescu-Avram, C., Extinderi ale problemelor propuse la Concursul "Problema Săptămânii", Revista Mateinfo.ro, martie 2010

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com

CALCULUL INTEGRAL ÎN CAZUL FUNCȚIILOR PERIODICE

ROXANA MIHAELA STANCIU[1]

Propoziția 1. Fie $f : R \to R$ o funcție continuă. Atunci avem:

a) f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, $\int_a^{a+T} f(x)dx = c(\text{constant})$

$(\forall)$ a$\in R$;

b) Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Orice primitivă a lui f , este periodică de perioadă T;

(ii) f este periodică, de perioadă T;

(iii) $\int_a^{a+T} f(x)dx = 0,\ (\forall)x \in R$

Demonstrație:

a) $(\Rightarrow)$. Din ipoteză, $f(x+T) = f(x), (\forall)x \in R$. Avem:

$$(1)\ \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt, (\forall)a \in R;$$

Făcând în ultima integrală, schimbarea de variabilă t=y+t, $y \in [0,T]$, obținem:

$$(2)\ \int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy, (\forall)a \in R.$$

Din (1) şi (2) rezultă: $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(T)dt, (\forall)a \in R;$

$(\Leftarrow)$. Presupunem că $\int_x^{x+T} f(t)dt = c, (\forall)x \in R$ şi fie F o primitivă a lui f .

Atunci , $c = F(x+T) - F(x), (\forall)x \in R$ şi deci prin derivare obținem:

$f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0, (\forall)x \in R$, de unde rezultă că f este periodică de perioadă T.

[1] Prof., Liceul cu Program Sportiv "Iolanda Balaş Sotter", Buzău
e-mail: roxanastnc@yahoo.com

b) (i)$\Rightarrow$ (ii) Mai întâi, observăm că , orice primitivă a lui f este periodică de perioadă T, dacă şi numai dacă, există o primitivă a lui f , periodică, de perioadă T, dacă şi numai dacă, funcţia $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, x $\in$ R, este periodică de perioadă T.

(ii)$\Rightarrow$(i). Dacă f este periodică, de perioadă T, avem: $(F(x+t)-F(x))'=f(x+t)-f(x)=0, \forall x \in R$, şi deci, există un $c \in R$, astfel încât $F(x+t)-F(x)=c, \forall x \in R$. Atunci $c=F(0+t)-F(0)=\int_0^T f(t)dt=0$, deci $F(x+t)=F(x), \forall x \in R$ şi deci F este periodică, de perioadă T.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Rezultă din a).

(i)$\Rightarrow$(iii). Dacă (i) este adevărată, atunci F este periodică, de perioadă T, şi avem: $\int_x^{x+T} f(t)dt=F(x+t)-F(x)=0, \forall x \in R$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Din $\int_x^{x+T} f(t)dt=F(x+t)-F(x)=0, \forall x \in R$

şi deci F este periodică, de perioadă T.

Concluzie. Acest capitol propune propoziţii care permit calculul unor integrale definite ce fac obiectul unor probleme publicate în Gazeta Matematică şi alte reviste de specialitate sau în unele manuale alternative de clasa a XII-a.

În continuare propun spre rezolvare următoarele probleme reprezentative :

pb. 14847 Gazeta Matematică, nr. 7 (1975)**, pb. 22377** Gazeta Matematică, nr. 5 (1991), **pb. 22750** Gazeta Matematică, nr. 1 (1993), **pb. 22990** Gazeta Matematică, nr. 4 (1994), **pb. 23834** Gazeta Matematică, nr. 12 (1997), **pb. 24094** Gazeta Matematică, nr. 3 (1999), **pb. 14847** Gazeta Matematică, nr. 7 (1975), pb. Dată în concurs Gazeta Matematică, nr. 1 (2002), **pb. 25054** Gazeta Matematică, nr. 2 (2004)

Bibliografie

[1]. V. Arsinte, *Probleme elementare de calcul integral,* Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

[1]. N. Stanciu - „Generalizarea unor probleme de calcul integral'' - Gazeta Matematică, seria A, nr. 4 / 2007

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DATĂ LA O.M.L 2008

NECULAI STANCIU[1]

La Olimpiada de Matematică, faza locală, Bucureşti27 ianuarie 2008, domnul *prof. dr. Vasile Pop* a propus la clasa a XI –a următoarea :

Problemă. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0 = a > 0$ *şi* $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{2x_n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Să se determine* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluție.(vezi [1]) Definim şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ astfel : $u_0 = 1$ şi $u_{n+1} = (2x_n + 3)\, u_n$, $n \geq 0$.Atunci $x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 3\right)$ şi introducând în relația de recurență avem: $\frac{1}{2}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 3\right) = \frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2}{\frac{u_{n+1}}{u_n}} \Leftrightarrow$ $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0$.Deoarece ecuația caracteristică are soluțiile $r_1 = 4$, $r_2 = 1$, rezultă că $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, deci $x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{Ar_1^{n+2}+Br_2^{n+2}}{Ar_1^n+Br_2^n} - 3\right) \to \frac{1}{2}(r_1 - 3) = \frac{1}{2}$.

În continuare, vom generaliza problema de mai sus şi vom da o altă soluție.
Problemă se rezolva foarte uşor după determinarea şirului (x_n).

I.Determinarea şirurilor date prin recurențe omografice (vezi [2])

Definiția 1. *Funcția* $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$, *se numeşte funcție omografică,* iar $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *se numeşte matricea ataşată funcției* f.

Propoziția 1. *Dacă* f şi g *sunt funcții omografice, atunci pe mulțimea* $D \subset \mathbb{R}$ *pe care sunt definite funcțiile* $f \circ g$ şi $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (*compunerea funcției* f *cu ea însăşi realizându-se de* n ori, $n \in \mathbb{N}^*$), *funcțiile* $f \circ g$ şi f^n *sunt omografice şi avem relațiile*:

$M_{f\circ g} = M_f \circ M_g$, $M_{f^n} = (M_f)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Fie $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} - \left\{\frac{d'}{c'}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $g(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$ funcții omografice şi $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M_g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matricele ataşate celor două funții.

Atunci, pe mulțimea $D \subset \mathbb{R}$, pe care există compunerea $f \circ g$, avem:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d} = \frac{a\cdot\frac{a'x+b'}{c'x+d'}+b}{c\cdot\frac{a'x+b'}{c'x+d'}+d} = \frac{(aa'+bc')x+ab'+bd'}{(ca'+dc')x+cb'+d'}$$

[1] Vicepreşedinte S.S.M.R - Filiala Rîmnicu Sărat
Prof., Şcoala gen. ''George Emil Palade'' , Buzău

Este tot o funcție omografică și $M_{f\circ g}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}==M_f\circ M_g$.

Egalitatea a doua se demonstrează prin inducție matematică.

Definiția 2. *Un șir recurent definit printr-o recurență de forma* $x_{n+1}=f(x_n)$, *unde* f *este o funcție omografică, se numeşte recurență omografică.*

Observația 1. Ca recurența să definească un șir este necesar ca $cx_n+d\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

Propoziția 2. *Dacă* $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *atunci* $x_n=f^n(x_0)$.

*Demonstrație.*Vom folosi metoda inducției matematice.

Fie $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$. Dacă $x_{n+1}=f(x_n)$, rezultă $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $x_1=f(x_0)=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.Adică lui x_1 , i se atașează matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

În continuare, pentru $x_2=f(x_1)=\frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{a\cdot\frac{ax_0+b}{cx_0+d}+b}{c\cdot\frac{ax_0+b}{cx_0+d}+d}=\frac{(a^2+bc)x_0+b(a+d)}{c(a+d)x_0+bc+d^2}$, obținem că

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+b) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ este matricea care i se atașează.

Presupunem acum că lui $x_n=\frac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}$, i se asociază matricea$A^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Avem $x_{n+1}=f(x_n)=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}=\frac{a\cdot\frac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}+b}{c\cdot\frac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}+d}=\frac{(aa_n+bc_n)x_0+(ab_n+bd_n)}{(ca_n+dc_n)x_0+(cb_n+dd_n)}$.

Deoarece $A^{n+1}=A^n\cdot A=A\cdot A^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_n+bc_n & ab_n+bd_n \\ ca_n+dc_n & cb_n+dd_n \end{pmatrix}$,

obținem astfel că lui x_n ,i se asociază matricea $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Remarcă. *Deci, pentru a calcula pe* x_n *în funcție de* x_0, *este suficient să calculăm pe* A^n.

Observația 2. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ poate fi definit cu anumite condiții asupra termenului inițial x_0.

Din expresiile matricei A^n deducem condițiile de existență a șirului recurent, $c_nx_0+d_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$ sau $x_0\neq -\frac{d_n}{c_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

II.O rafinare a ridicării la putere a matricilor utilă în liceu

Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pentru găsirea elementelor matricei A^n (vezi [3])se parcurg următoarele trei etape :

a.Se rezolvă ecuația caracteristică, $\det(A-\lambda I_2)=\lambda^2-tr(A)\lambda+D=0$,
(unde $tr(A)=a+d$, $D=\det(A)=ad-bc$) și se determină $\sigma_A=\{\lambda_1,\lambda_2\}\subset C$.

b. Se notează $v_n=\begin{cases}\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}, \lambda_2\neq\lambda_1 \\ n\lambda_1^{n-1}, \lambda_2=\lambda_1\end{cases}$

c. Se aplică formula (1) $A^n=v_nA-Dv_{n-1}I_2$, $n\in N$.

*Demonstrație.*Se procedează prin inducție după n.Deoarece λ_1,λ_2 sunt rădăcinile polinomului $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\lambda^2-tr(A)\lambda+D$, rezultă $v_0=0,v_1=1,v_2=tr(A)$, deci formula (1) este verificată pentru $n=1$ şi de asemenea pentru $n=2$ .Presupunând că formula (1) este adevărată pentru primele n numere naturale, găsim

$$A^{n+1}=v_nA^2-Dv_{n-1}A=v_n(tr(A)A-DI_2)-Dv_{n-1}A=$$
$$=(v_ntr(A)-Dv_{n-1})A-Dv_nI_2=v_{n+1}A-Dv_nI_2$$

ceea ce completează demonstrația formulei (1).

III.Generalizarea problemei

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0=\alpha>0$ *şi* $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Să se determine* $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Soluție. Conform I. determinăm $x_n=\frac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}$, unde a_n,b_n,c_n,d_n se află din $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^n$. În continuare utilizăm formula (1) din II.

Cazul 1. Dacă ecuația caracteristică are soluții diferite, obținem:

$x_n=\frac{[(\lambda_2^n-\lambda_1^n)a-D(\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1})]x_0+(\lambda_2^n-\lambda_1^n)b}{(\lambda_2^n-\lambda_1^n)cx_0+(\lambda_2^n-\lambda_1^n)d-D(\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1})}$.Lăsăm cititorul să determine $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Observația 1. Pentru obținerea soluției problemei dată la O.M.L. 2008, se înlocuiesc în relația de mai sus valorile proprii $\lambda_1=4,\lambda_2=1$, apoi rezultă ușor $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

Cazul 2. Dacă ecuația caracteristică are soluții egale, $\lambda_1=\lambda_2=\frac{a+d}{2}$,obținem:

$x_n=\frac{n(\lambda_1(ax_0+b)-Dx_0)+Dx_0}{n(\lambda_1(cx_0+d)-D)+D}$, iar $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\lambda_1(ax_0+b)-Dx_0}{\lambda_1(cx_0+d)-D}$. Dacă înlocuim $\lambda_1=\frac{a+d}{2}$ şi $D=ad-bc$ se obține:

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{(ax_0+b)(a+d)-2(ad-bc)x_0}{(cx_0+d)(a+d)-2(ad-bc)}$.

BIBLIOGRAFIE

[1]M. Andronache, D. Şerbănescu, Olimpiada de Matematică, etapa județeană, 1 martie 2008, G.M. 4 / 2008.

[2]V. Pop, V. Lupşor, Matematică pentru grupele de performanță, Editura Dacia Educațional, Cuj-Napoca, 2004

[3] L. Lupaş, A. Lupaş, Probleme de algebră, Editura Gil, Zalău, 2001.

INEGALITATEA Cauchy-Schwartz-Buniakowski
VARIANTA INTEGRALA

Prof. Rîcu Ileana
Grup Şcolar Agricol Roşiori

Teorema **(Hölder)**

Fie f ,g :[a,b]$\to \mathbb{R}$ două funcţii integrabile şi p,q ≥ 1 cu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Atunci avem:

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstraţie

Dacă $\int_a^b |f(x)|^p\,dx=0$ sau $\int_a^b |g(x)|^q\,dx=0$ se obţine că f este nulă aproape peste tot sau g este nulă aproape peste tot,deci fg este nulă aproape peste tot $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$ şi se obţine egalitatea.

Presupunem că $u=\int_a^b |f(x)|^p\,dx \succ 0$ şi $v=\int_a^b |g(x)|^q\,dx \succ 0$

Se arată(cu ajutorul derivatelor) că dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi $\alpha+\beta \succ 0$,atunci $\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}\geq \alpha\beta \quad (1)$

Luând $\alpha=\frac{|f(x)|}{u^{\frac{1}{p}}} si \beta=\frac{|g(x)|}{v^{\frac{1}{q}}}$ din relaţia (1) se obţine inegalitatea

$$\frac{|f(x)|^p}{pu}+\frac{|g(x)|^q}{qv}\geq \frac{|f(x)\cdot g(x)|}{u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{q}}}$$

Aplicând procedeul de integrare se obţine inegalitatea lui Hőlder.

Teorema **(Cauchy-Schwartz-Buniakowski)**

Fie f ,g :[a,b]$\to \mathbb{R}$ două funcţii integrabile. Atunci avem:

$$\left(\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)$$

Demonstratie

În inegalitatea integrală a lui Hölder punem p=q=2

APLICATIA 1. Fie f:[a,b] → **R** o funcție integrabilă.Să se arate că:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le(b-a)\cdot\int_a^b f^2(x)dx$$

Soluție:Aplicăm **inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowski**

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b\cos^2 x dx\right)$$ şi

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b\sin^2 x dx\right)$$

Prin adunare rezultă:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\left(\int_a^b\sin^2 x dx+\int_a^b\cos^2 x dx\right)$$

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\left(\int_a^b\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx\right)=$$

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b 1dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx$$

APLICATIA 2. Fie f :[0,1]→ **R** o funcție derivabilă cu derivata continuă pe [0,1] astfel că f(0)=f(1)=0.Să se arate că: $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^4\le\frac{\sqrt{3}}{144}\int_0^1\left(f'(x)\right)^4\cdot\cos^2 x dx$

(Concursul „Gheorghe Lazăr”,Editia VII,Sibiu)

Soluție: Folosind ipoteza rezultă că: $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=0$ şi

$\int_0^1 f(x)dx=\left(f(x)\cdot x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx$,de unde avem:

$$\int_0^1 (1-2x)f'(x)\,dx = \left((1-2x)f(x)\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{şi}$$

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x)f'(x)\,dx\right]^2 \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-2x)^2\,dx\right)\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x-2x^2-4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \cdot \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) = \frac{1}{12}\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) \qquad (1)$$

Am folosit **inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowski**

Mai mult,din aceeaşi inegalitate C.S.B.sub formă integrală avem:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad \Rightarrow$$

$$\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^2 \le \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x\,dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x}dx = (tgx)\Big|_0^1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cdot \cos^2 x \cdot dx =$$

$$= tg1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x\,dx \prec \sqrt{3} \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x\,dx \quad (2)$$

Din (1) şi (2) avem: $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^4 \le \frac{1}{12}\left[\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right]^2 \le \frac{1}{144}\cdot\int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x\,dx$

q.e.d.

APLICATIA 3. Pentru functia f: $[2,3] \to (0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt[2n]{x^2+1}$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$,sa se arate ca

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x\,dx\right)^2 + \left(\int_2^3 f(x)\cos x\,dx\right)^2 \le \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}\,dx$$

Olimpiada de matematica-faza locala-Giurgiu-2006

Solutie:

Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x\,dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)dx \cdot \int_2^3 \sin^2 x\,dx \quad (1)$$

$$\left(\int_2^3 f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)dx \cdot \int_2^3 \cos^2 x dx (2)$$

Relatiile (1) si (2) se aduna membru cu membru si obtinem:

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_2^3 f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)dx \cdot \int_2^3 1dx = \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}dx \cdot x\Big|_2^3 =$$

$$= \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}dx$$

q.e.d.

APLICATIA 4. Sa se demonstreze inegalitatea:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solutie: Consideram functiile :

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

$$g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{\sin x}$$

Sunt functii continue pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ si cu valori pozitive; aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{\sin x} dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\cdot 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

APLICATIA 5. Fie $c \in \mathbb{R}^*, f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f continua pe [a,b] astfel incat $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx = c$.

Sa se arate ca : $\int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \frac{c^2(a+b-2)^2}{\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx}$

Concurs„Mathematica-Modus Vivendi"-Rimnicu-Vilcea

Solutie:
Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \left(\int_a^b (x-a)(x-b)f'(x)\right)^2 \text{ relatia (1)}$$

Calculam

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f'(x) \overset{prin\ parti}{=} \left[(x-a)(x-b)f(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b (2x-a-b)f(x)\,dx =$$

$$= -2\int_a^b xf(x)\,dx + (a+b)\int_a^b f(x)\,dx = -2c + (a+b)c = c(a+b-2) \quad (2)$$

Inlocuind (2) in(1) rezulta:

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq c^2(a+b-2)^2 \qquad /: \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \succ 0$$

Avem: $\int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \frac{c^2(a+b-2)^2}{\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx}$ q.e.d.

APLICATIA 6. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, o functie derivabila cu derivata continua astfel incat

f(1) - f(0) = a .Sa se arate ca $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geq a^2$

Solutie: Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx \geq \left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_0^1\right)^2 = \left(f(1)-f(0)\right)^2 = a^2$$

APLICATIA 7. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie derivabila cu derivata continua astfel incat f(1)=f(0)=0.Sa se arate ca :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

Când se realizează egalitatea?

H.I.Seiffert,Elemente der Mathematik vol.38,nr.2-1983

Solutie:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \overset{\substack{prin\\ parti}}{=} \left(xf(x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = -\int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx$$

$$dar \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0) = 0 (*)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)\,dx = -2\int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = 0+\int_0^1 -2xf'(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^1 2xf'(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x)f'(x)\,dx (**) \Rightarrow$$

Prin ridicare la patrat in ambii membri ai relatiei(**),avem:

$$4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-2x)\,f'(x)\,dx\right)^2 \overset{ineg.C.S.B.}{\leq}$$

$$\leq \int_0^1 (1-2x)^2\,dx \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \left(x-2x^2+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$$

Avem $4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$ si prin impartire cu 4 obtinem relatia

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

Pentru egalitate vom încerca funcții polinomiale,cu intenția de a identifica în cei doi membri coeficienții.Nu este posibilă o funcție liniară,din cauza condițiilor f(1)=f(0)=0,dar polinomul cx(1-x) cu c=constantă arbitrară,are ca derivată c(1-2x) şi este uşor de văzut că $4\left(\int_0^1 cx(1-x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{3}\int_0^1 c(1-2x)^2\,dx$ deci egalitatea se obține pentru f(x)=cx(1-x) cu c=constantă arbitrară.Am obținut astfel o condiție suficientă pentru egalitate,fără a fi însă necesară. q.e.d.

APLICATIA 8. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie continuă şi $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.Să se arate că :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left[f(x)\right]^2 dx$$

Când se realizează egalitatea?

H.I.Seiffert,Elemente der Mathematik vol.38,nr.1-1983

Soluție: Vom putea aplica inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** dapă cum urmează:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\cdot xf(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1 x^2f^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \int_0^1 x^2f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2f^2(x)\,dx$$

Se vede că nu am aplicat condiția din enunț $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Vom obține egalitatea pentru f(x)=1,pentru care $\int_0^1 1dx = 1 \ne 0$

Într-adevăr, $\left(\int_0^1 x^2dx\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$

Cum $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \ne 0$ avem încă o dovadă că $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.este o condiție supraabundentă.

Comentarii: Problema admite numeroase generalizări dintre care prezentăm următoarea:

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie continuă.Să se arate că :

$\left(\int_0^1 x^{m+p} f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{2m+1}\int_0^1 x^{2p}\left[f(x)\right]^2 dx$,unde m , p sunt numere naturale.

Când se realizează egalitatea?

Aplicații ale calculului integral

Prof. Cojocaru Camelia
Școala Nr. 1 Chiraftei, Jud. Galați

Noțiunea de primitivă s-a degajat din aplicațiile matematicii în situații concrete, care constă în determinarea modelului matematic al unui proces atunci când se dă viteza de variație a acestuia.

Definiția 1

1] Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval, $f: I \to \mathbf{R}$. Se numeşte ***primitivă a funcției f pe I***, orice funcție $F: I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I şi cu proprietatea $F' = f$ pe I
($F'(x) = f(x), \forall x \in I$).

2] Operația de determinare a unei primitive F a lui f pe intervalul I se numeşte ***operație de integrare***, notată prin simbolul $\int f(x)\,dx$.

3] Funcția $f: I \to \mathbf{R}$ care admite cel puțin o primitivă pe I se numeşte ***funcție cu primitive pe I*** şi mulțimea acestor funcții se va nota prin P(I).

Teorema 1 (Proprietăți generale ale primitivelor)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval şi $f: I \to \mathbf{R}$, atunci au loc afirmațiile:

(p_1) Dacă F este o primitivă a lui f pe I atunci pentru $\forall C \in \mathbf{R}$, funcția
F + C este o primitivă a lui f pe I.

(p_2) Două primitive oarecare F şi G a lui f pe I diferă printr-o constantă.

*(p_3) **Primitiva generală** sau **integrala nedefinită** sau **antiderivata** unei funcții f este dată prin:*

$$(1)\ \int f(x)\,dx = \{F + C \mid F: I \to \mathbf{R} \text{ primitivă a lui } f;\ C \in \mathbf{R}\} \overset{not}{=} F(x) + C,\ x \in I$$

(p_4) Integrala nedefinită este inversa aplicației de diferențiere:

$$(2)\ \int dF(x) = F(x) + C \quad (3)\ d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx.$$

Teorema 2 (Operații algebrice cu primitive)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval şi $f, g: I \to \mathbf{R}$ cu $f, g \in P(I)$, atunci au loc proprietățile:

(p5) $\int d(\lambda f) = \lambda \int df = \lambda f + C,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall C \in \mathbf{R}$

(p6) $\int d(f \pm g) = \int df \pm \int dg = f \pm g + C;\ C \in \mathbf{R}$

(p7) $\int d(fg) = \int (gdf + fdg) = \int gdf + \int fdg$

Consecința 1

*Fie $f, g \in C^1(I)$ din (p_7) se obține **formula de integrare prin părți**, care este o metodă de calcul pentru primitive:*

$$(4)\ \int fdg = fg - \int gdf$$

Consecința 2

Dacă $f: I \to \mathbf{R}$, $f \in P(I)$ cu F o primitivă oarecare a sa şi $x = u(t), t \in J$ este o schimbare de variabilă cu $u \in C^1(J)$, atunci din formula de diferențiere a funcțiilor compuse, avem:

$$(5)\ \int f(x)\,dx = \int f[u(t)]\,du(t) = \int f[u(t)]\,u'(t)\,dt = F[u(t)] + C.$$

Orice mărime geometrică, fizică, economică etc. care are proprietatea de "***aditivitate față de mulțime (interval)***" se poate exprima printr-o integrală definită. Astfel noțiunile de "***arie***" şi "***volum***"

pentru figuri geometrice din plan şi corpuri din spaţiu se pot defini în mod riguros din punct de vedere matematic.Vom prezenta fără demonstraţie unele aplicaţii ale integralei definite.

I. Aria unui domeniu din plan

1. ***Aria mulţimii*** din plan $D\subset \mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcţiei $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ pozitivă şi continuă se calculează prin formula: (1) $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ continuă şi de semn oarecare, avem: (1') $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. ***Aria mulţimii*** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor $f , g : [a, b]\to \mathbf{R}$ continue este calculată prin formula: (2) $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x)-f(x)|dx$.

II. Lungimea unui arc de curbă

Se numeşte ***curbă plană*** o mulţime $\Gamma\subset \mathbf{R}^2$ cu proprietatea că există o funcţie continuă $f : [a, b]\to \mathbf{R}$, notată $y = f (x)$, $x\in [a, b]$ şi $G_f = \Gamma\subset \mathbf{R}^2$ (graficul lui f din plan este Γ). Dacă f are derivată continuă (sau numai funcţie integrabilă) pe $[a, b]$, lungime a curbei Γ se calculează după formula: (3) $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

III. Volumul unui corp de rotaţie

Fie $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, atunci corpul K din spaţiu obţinut prin rotirea graficului lui f, G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula:

(4) $\mathcal{V}(K) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

IV. Suprafaţa unui corp de rotaţie

Fie $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $[a, b]$ şi cu f' continuă ($f \in C^1([a, b])$), atunci suprafaţa S a corpuui K obţinut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox se calculează prin formula:

(5) $\mathcal{S}(K) = 2\pi\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Exemple.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ cu $f = \sqrt{1-x^2}$ funcţie continuă şi prin schimbarea de variabilă:

$$x = \sin t, dx = \cos t dt, x = 0 \to t = 0, x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \text{ avem : } \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ cu $f(x) = \sin^n x \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ şi $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$, aplicând metoda integrării prin părţi se obţine o formulă de recurenţă:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(\sin xdx)=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\Rightarrow I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\text{ cu }n\geq 2\Rightarrow I_n=\begin{cases}\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot....\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};n=2k\\ \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot....\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1;n=2k+1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right]\cdot\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}$$

şi se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}...\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right]$ numită ***formula lui Wallis.***

3. $\int_4^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ prin substituția

$$x=t^2,dx=2tdt,x=4\to t=2,x=9\to t=3,\text{avem}:\int_4^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=2\int_2^3\frac{tdt}{1+t}=$$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t\Big|_2^3-2\ln(1+t)\Big|_2^3=2-2\ln\frac{4}{3}$$

4. $\int_1^2 x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\frac{1}{2}\int_1^2 xdx=2\ln 2-\frac{3}{4}$

5. $I_n=\int_1^e(\ln x)^n dx=x(\ln x)^n\Big|_1^e-\int_1^e xn(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx=e-nI_{n-1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}I_n=e-nI_{n-1},n\geq 1\\ I_0=e-1;I_1=1\end{cases}$$

formulă de recurență pentru calculul lui I_n, $n\in\mathbf{N}$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(5+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)}dx$ prin substituția $\text{tg}\frac{x}{2}=t$, deci: $x=2\,\text{arctg}\,t,dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ şi

$$x=0\to t=0,x=\frac{\pi}{2}\to t=1\text{ se obține }\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(3+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)}dx=\int_0^1\frac{1+t^2}{2(3+t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t^2+3}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ prin substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=0\to t=0, x=\frac{\pi}{2}\to t=1$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}=\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$

$=2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$ şi prin substituția $\operatorname{tg}x=t \Rightarrow$

$x=\operatorname{arctg} t, dx=\frac{dt}{1+t^2}, x=0\to t=0, x=\frac{\pi}{4}\to t=1$ avem:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^1 \frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{t+1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right]dt=\frac{1}{4}\ln(1+t^2)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1-$

$-\frac{1}{2}\ln(t+1)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 2\right)$

9. $\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx=\int_1^4 x^0(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}dx$ (m=0, $n=\frac{1}{2}, p=\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}=1\in\mathbf{Z}$) prin substituția:

$1+\sqrt{x}=t, x=(t-1)^2, x=1\to t=2, x=4\to t=3$ avem:

$\int_1^4 1+\sqrt{x}dx=\int_2^3 \sqrt{t}\,2(t-1)dt=2\int_2^3\left(t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)dt=2\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_2^3=\frac{16}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{15}\sqrt{2}$

10. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$ prin substituția: $e^x-1=t^2 \Rightarrow x=\ln(1+t^2),\ dx=\frac{2t}{1+t^2}dt,$

$x=0\to t=0, x=\ln 2\to t=1$, avem:

$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx=2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2t\Big|_0^1-2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$

11. $\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ prin substituția: $\frac{x-1}{x+1}=t^2 \Rightarrow x=1\to t=0, x=2\to t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi

$x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, dx=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$ avem:

$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{2t}{1-t^2}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\sqrt{3}+\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}\right|=\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3})$

Bibliografie:
Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a,
Autori: Nicu Boboc, Ion Colojoara.